

Egzamin maturalny z matematyki
CZERWIEC 2011

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Odp.	D	B	A	B	C	B	A	B	D	B	C	D	C	A	A	C	B	D	C	B	A	D

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 23. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 2x + 24 \geq 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2 + 2x + 24$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 4 + 192 = 196 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-2 - 14}{-4} = 4 \text{ oraz } x_2 = \frac{-2 + 14}{-4} = -3$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = -12 \text{ i stąd } x_1 = 4 \text{ oraz } x_2 = -3$$

albo

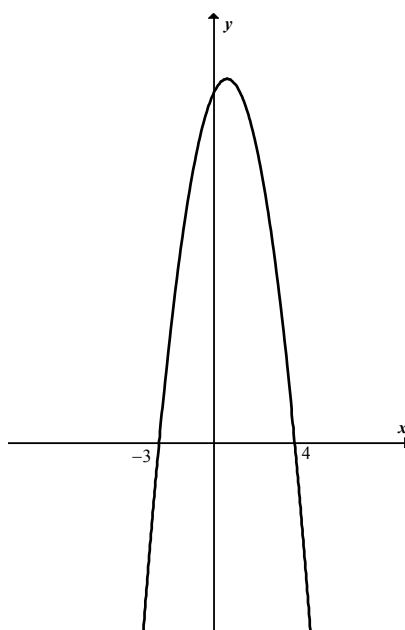
- podajemy je bezpośrednio (explicite lub zapisując postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie)

$$x_1 = 4, x_2 = -3$$

lub

$$-2(x - 4)(x + 3) \geq 0$$

lub



Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego

$$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{2} \geq 0$$

a następnie

- przekształcamy nierówność, tak by jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej

$$-2\left(x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) \geq 0$$

$$-2(x - 4) \cdot (x + 3) \geq 0$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $\langle -3, 4 \rangle$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = 4$, $x = -3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -2x^2 + 2x + 24$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
 - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-2(x - 4) \cdot (x + 3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
 - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
 - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = 1$ i $x_1 \cdot x_2 = -12$ lub $x_1 + x_2 = -1$ i $x_1 \cdot x_2 = 12$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność,

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -3, 4 \rangle$ lub $x \in \langle -3, 4 \rangle$ lub $-3 \leq x \leq 4$,

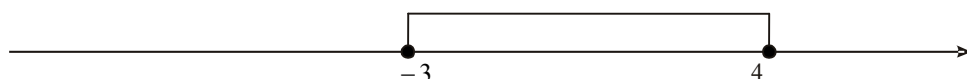
albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -3$, $x \leq 4$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -3$ i $x_2 = 4$ i zapisze $x \in \langle 3, 4 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematycznym akceptujemy zapis $x \geq -3$, $x \leq 4$.
3. Jeżeli błąd zdającego w obliczeniu pierwiastków trójmianu nie wynika z wykonywanych przez niego czynności (zdający rozwiązuje „swoje zadanie”), to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 24. (2 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-b}{x-9}$, dla $x \neq 9$ oraz $f(14) = 5$. Oblicz współczynnik b .

Rozwiązanie

Warunek $f(14) = 5$ zapisujemy w postaci równania z niewiadomą b : $5 = \frac{2 \cdot 14 - b}{14 - 9}$.

Rozwiązujemy to równanie i obliczamy współczynnik b : $b = 3$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt

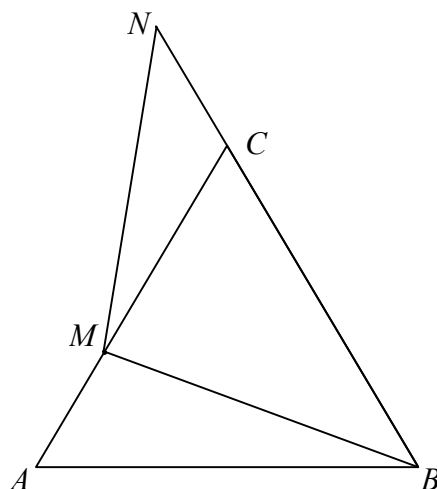
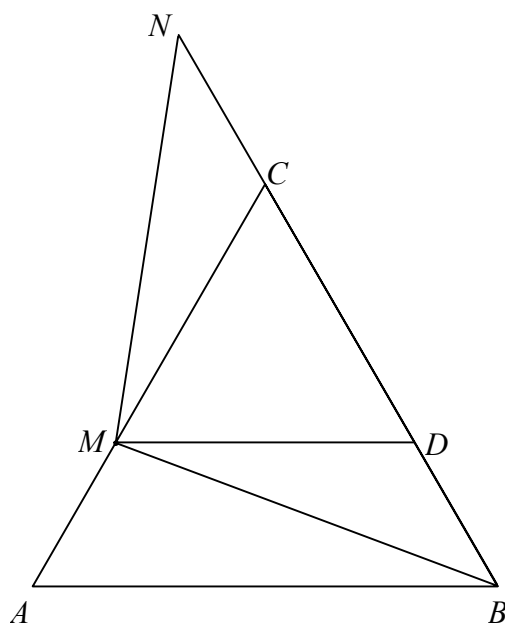
gdy poprawnie zapisze równanie z niewiadomą b , np. $5 = \frac{2 \cdot 14 - b}{14 - 9}$ lub $5 \cdot 5 = 28 - b$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy współczynnik $b = 3$.

Zadanie 25. (2 pkt)

Na poniższym rysunku trójkąt ABC jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M , tak że $|AM| = |CN|$. Udowodnij, że $|BM| = |MN|$.

**I sposób rozwiązania**

Rysujemy odcinek MD równoległy do odcinka AB .

Uzasadniamy, że trójkąty BDM i MCN są przystające na podstawie cechy bkb :

- $|BD| = |CN|$, bo $|BD| = |AM|$
- $|MD| = |CM|$, bo trójkąt MDC jest równoboczny
- $|\sphericalangle BDM| = 120^\circ = |\sphericalangle NCM|$.

Zatem $|BM| = |MN|$.

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
 gdy napisze, że trójkąty BDM i MCN są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$

Zdający otrzymuje 2 pkt
 gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty ACD i BCE są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Uwaga

Zdający może też dorysować odcinek $MD \parallel BC$ i analogicznie pokazać, że trójkąty BMD i MNC są przystające.

II sposób rozwiązania

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABM obliczamy $|BM|^2$:

$$\begin{aligned} |BM|^2 &= |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \cos 60^\circ = \\ &= |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \frac{1}{2} = \\ &= |AM|^2 + |AB|^2 - |AM| \cdot |AB|. \end{aligned}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta MCN obliczamy $|MN|^2$:

$$\begin{aligned} |MN|^2 &= |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \cos 120^\circ = \\ &= |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= |MC|^2 + |CN|^2 + |MC| \cdot |CN| \end{aligned}$$

Ponieważ $|AM| = |CN|$ i $|MC| = |AB| - |AM|$, więc

$$\begin{aligned} |MN|^2 &= (|AB| - |AM|)^2 + |AM|^2 + (|AB| - |AM|) \cdot |AM| = \\ &= |AB|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AM| + |AM|^2 + |AB| \cdot |AM| - |AM|^2 = |AB|^2 + |AM|^2 - |AB| \cdot |AM| \end{aligned}$$

Zatem $|BM|^2 = |MN|^2$, czyli $|BM| = |MN|$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
 gdy korzystając z twierdzenia cosinusów obliczy kwadraty długości odcinków BM i MN .

Zdający otrzymuje 2 pkt
 gdy poprawnie uzasadni, że $|BM| = |MN|$.

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Zadanie 26. (2 pkt)

Dane są wielomiany $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$, $Q(x) = 2x^2 - x - 1$ oraz $W(x) = ax + b$. Wyznacz współczynniki a i b tak, by wielomian $P(x)$ był równy iloczynowi $W(x) \cdot Q(x)$.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy iloczyn $W(x) \cdot Q(x)$:

$$W(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - x - 1)(ax + b)$$

$$W(x) \cdot Q(x) = 2ax^3 + 2bx^2 - ax^2 - bx - ax - b$$

$$W(x) \cdot Q(x) = 2ax^3 + (2b - a)x^2 - (a + b)x - b$$

Porównujemy współczynniki wielomianów $P(x)$ i $W(x) \cdot Q(x)$ i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ 2b - a = 3 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a = -1$, z ostatniego $b = 1$. Sprawdzamy, że obliczone a oraz b spełniają pozostałe dwa równania.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze wielomian $W(x) \cdot Q(x)$ w postaci $2ax^3 + (2b - a)x^2 - (a + b)x - b$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- obliczy $a = -1$ i $b = 1$

albo

- zapisze $W(x) = -x + 1$

II sposób rozwiązania

Sprawdzamy, że liczba 1 jest jednym z miejsc zerowych wielomianu $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ i dzielimy wielomian $-2x^3 + 3x^2 - 1$ przez dwumian $x - 1$.

$$(-2x^3 + 3x^2 - 1) : (x - 1) = -2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 2x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline = = \end{array}$$

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Następnie zapisujemy $P(x) = (-2x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$, czyli $P(x) = (2x^2 - x - 1) \cdot (-x + 1)$.

Porównując współczynniki wielomianów $W(x) = ax + b$ oraz $-x + 1$ otrzymujemy $a = -1$, $b = 1$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy podzieli wielomian $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ przez dwumian $x - 1$ i zapisze

$$P(x) = (-2x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) \text{ lub } P(x) = -2(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- obliczy $a = -1$ i $b = 1$

albo

- zapisze $W(x) = -x + 1$.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdzi, że liczba $\left(-\frac{1}{2}\right)$ jest jednym z miejsc zerowych wielomianu

$P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$, podzieli wielomian $-2x^3 + 3x^2 - 1$ przez dwumian $x + \frac{1}{2}$ i zapisze

$$P(x) = (-2x^2 + 4x - 2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ lub } P(x) = -2(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ i na tym poprzestanie}$$

lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

III sposób rozwiązania

Dzielimy wielomian $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ przez wielomian $Q(x) = 2x^2 - x - 1$

$$(-2x^3 + 3x^2 - 1) : (2x^2 - x - 1) = -x + 1$$

$$\begin{array}{r} \underline{2x^3 - x^2 - x} \\ -2x^3 + 3x^2 - 1 \\ \hline x^2 - x - 1 \\ \underline{-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \\ \hline \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \end{array}$$

i zapisujemy $P(x) = (2x^2 - x - 1) \cdot (-x + 1)$.

Z porównania odpowiednich współczynników, otrzymujemy $a = -1$, $b = 1$.

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy podzieli wielomian $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ przez wielomian $Q(x) = 2x^2 - x - 1$ i zapisze w postaci $P(x) = (2x^2 - x - 1) \cdot (-x + 1)$ lub $P(x) = -2(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

- obliczy $a = -1$ i $b = 1$
- albo
- zapisze $W(x) = -x + 1$

Zadanie 27. (2 pkt)

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie

Liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ przedstawiamy w postaci

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 3^n - 2^n = 3^n(9 + 1) - 2^n(4 + 1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} =$$

$$= 10(3^n - 2^{n-1}) = 10k, \text{ gdzie } k = 3^n - 2^{n-1} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Zatem liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i nie uzasadni, że liczba $2^n \cdot 5$ jest podzielna przez 10

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, np.:

- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10(3^n - 2^{n-1}) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą
- albo
- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10(3^n - 2^{n-1})$ i zapisze, że $3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą
- albo
- zapisze liczbę w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i uzasadni, że jest podzielna przez 10

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Uwaga

Jeśli zdający zapisuje kolejno:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10x$$

$$3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10x$$

$$10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10x,$$

$$5(2 \cdot 3^n - 2^n) = 10x$$

$$2 \cdot 3^n - 2^n = 2x$$

i **uzasadnia**, że $2 \cdot 3^n - 2^n$ jest liczbą podzielną przez 2, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. (2 pkt)

Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	4	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

Rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III

$$\frac{6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{20} = \frac{65}{20} = 3,25.$$

Mediana 20 uzyskanych ocen to średnia arytmetyczna dziesiątego i jedenastego wyrazu uporządkowanego w kolejności niemalejącej ciągu ocen. Dziesiąty i jedenasty wyraz tego ciągu to 3, zatem mediana jest równa 3.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy medianę uzyskanych ocen i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy średnią arytmetyczną i medianę uzyskanych ocen: odpowiednio 3,25 i 3.

Zadanie 29. (2 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 1 mniejsza od liczby oczek w drugim rzucie.

I sposób rozwiązania

Ω jest zbiorem wszystkich par (a, b) takich, że $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mamy model klasyczny, w którym $|\Omega| = 36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$

Zatem $|A| = 5$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje..... 1 pkt

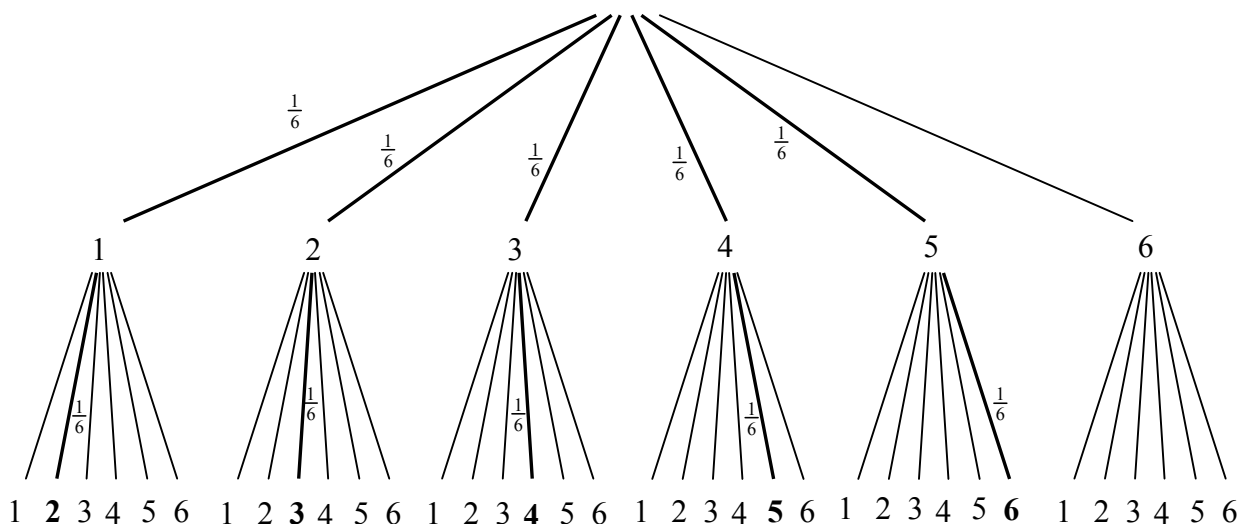
gdy zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{36}$.

II sposób rozwiązania: metoda drzewa

Rysujemy drzewo i pogrubiamy istotne dla rozwiązania zadania gałęzie tego drzewa. Zapisujemy prawdopodobieństwa tylko na tych gałęziach.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje..... 1 pkt

gdy

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach)

albo

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i nie wskazuje na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{36}$.

III sposób rozwiązania: metoda tabeli

Rysujemy tabelę i wybieramy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

		II kostka					
		1	2	3	4	5	6
I kostka	1		X				
	2			X			
	3				X		
	4					X	
	5						X
	6						

$|\Omega| = 36$ i $|A| = 5$, zatem $P(A) = \frac{5}{36}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy narysuje tabelę i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające lub zaznaczy je w tabeli.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy poda poprawną odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{36}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to przyznajemy **1 punkt**.

Zadanie 30. (2 pkt)

Liczby 27, x , 3 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania

Korzystając ze wzoru na trzeci wyraz ciągu geometrycznego obliczamy q iloraz ciągu:

$$3 = 27 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{9}$$

$$q = -\frac{1}{3} \text{ lub } q = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ ciąg jest malejący, to $q = \frac{1}{3}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, zatem ósmy wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{81}$.

II sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że $x^2 = 27 \cdot 3$. Stąd $x^2 = 81$, czyli $x = 9$ lub $x = -9$. Ponieważ ciąg jest malejący, to $x = 9$, a iloraz tego ciągu q jest równy $\frac{1}{3}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, zatem ósmy wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{81}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć ósmy wyraz ciągu korzystając ze wzoru: $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy q iloraz ciągu: $q = \frac{1}{3}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy ósmy wyraz ciągu: $\frac{1}{81}$.

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Zadanie 31. (4 pkt)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4 (cyfry mogą się powtarzać).

I sposób rozwiązania (wypisanie wszystkich liczb):

Zauważamy, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby spośród cyfr 1, 2, 3 i 4, drugą również na 4 sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią także na 4 sposoby.

Wypisujemy wszystkie liczby spełniające warunki zadania i dodajemy je, np.:

$$111 + 112 + 113 + 114 + 121 + 122 + 123 + 124 + \\ + 131 + 132 + 133 + 134 + 141 + 142 + 143 + 144 = 2040$$

$$211 + 212 + 213 + 214 + 221 + 222 + 223 + 224 + \\ + 231 + 232 + 233 + 234 + 241 + 242 + 243 + 244 = 3640$$

$$311 + 312 + 313 + 314 + 321 + 322 + 323 + 324 + \\ + 331 + 332 + 333 + 334 + 341 + 342 + 343 + 344 = 5240$$

$$411 + 412 + 413 + 414 + 421 + 422 + 423 + 424 + \\ + 431 + 432 + 433 + 434 + 441 + 442 + 443 + 444 = 6840$$

Suma wszystkich liczb jest równa: $2040 + 3640 + 5240 + 6840 = 17760$.

Uwaga

Sumę 64 liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania możemy obliczyć zauważając, że we wszystkich dodawaniach zmieniają się tylko sumy setek:

$$16 \cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 14 + 21 + 22 + 23 + 24 + \\ + 31 + 32 + 33 + 34 + 41 + 42 + 43 + 44) = 1600 + 440 = 2040$$

$$16 \cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 14 + 21 + 22 + 23 + 24 + \\ + 31 + 32 + 33 + 34 + 41 + 42 + 43 + 44) = 3200 + 440 = 3640$$

$$16 \cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 14 + 21 + 22 + 23 + 24 + \\ + 31 + 32 + 33 + 34 + 41 + 42 + 43 + 44) = 4800 + 440 = 5240$$

$$16 \cdot 400 + (11 + 12 + 13 + 14 + 21 + 22 + 23 + 24 + \\ + 31 + 32 + 33 + 34 + 41 + 42 + 43 + 44) = 6400 + 440 = 6840$$

Suma wszystkich liczb jest równa: $2040 + 3640 + 5240 + 6840 = 17760$.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe, których cyfry wybrane są ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

Każdą z tych liczb można zapisać w postaci $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, gdzie a, b, c to cyfry wybrane ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4\}$. Sumę tych 64 liczb obliczamy dodając oddzielnie wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i oddzielnie cyfry jedności.

Obliczamy, ile razy jedynka występuje jako cyfra setek. Cyfrą dziesiątek może wówczas być jedna z 4 cyfr spośród 1, 2, 3, 4 i cyfrą jedności też jedna z tych 4 cyfr. Zatem jedynka jako cyfra setek występuje w 16 liczbach. W sumie 64 liczb spełniających warunki zadania. składnik 100 wystąpi 16 razy. Podobnie 16 razy wystąpi składnik 200, 16 razy wystąpi składnik 300 i 16 razy składnik 400. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dają sumę

$$16 \cdot 100 + 16 \cdot 200 + 16 \cdot 300 + 16 \cdot 400 = 16 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 16000.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra spośród 1, 2, 3, 4 wystąpi 16 razy jako cyfra dziesiątek. Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dają sumę

$$16 \cdot 10 + 16 \cdot 20 + 16 \cdot 30 + 16 \cdot 40 = 16 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 1600.$$

Postępując analogicznie obliczamy sumę cyfr jedności:

$$16 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 16 \cdot 4 = 16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 160.$$

Suma wszystkich 64 liczb jest zatem równa $16000 + 1600 + 160 = 17760$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zapisanie, że istnieją 64 liczby trzycyfrowe zapisane wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

- wypisanie wszystkich liczb trzycyfrowych, które można zapisać wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3 i 4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać).

albo

- zapisanie sum „setek”, „dziesiątek” i „jedności”.

Uwaga

Jeżeli zdający wypisze liczby spełniające warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i nie obliczy ich sumy albo zapisze sumy „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i nie obliczy ich sumy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają

poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

- wypisanie liczb spełniających warunki zadania z pominięciem co najwyżej trzech liczb i obliczenie ich sumy

albo

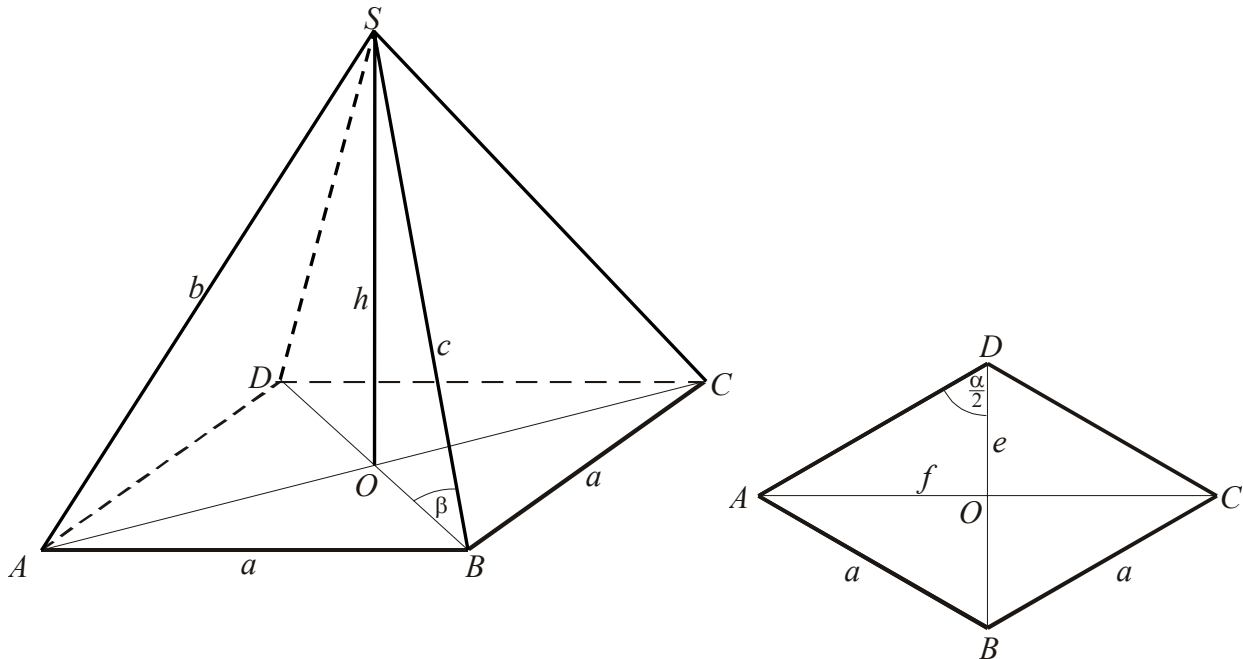
- zapisanie sumy „setek” lub „dziesiątek” lub „jedności” z jednym błędem rachunkowym i obliczenie ich sumy.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Obliczenie sumy wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4 (przy czym cyfry mogą się powtarzać): 17760.

Zadanie 32. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest romb $ABCD$ o boku długości 4. Kąt ABC rombu ma miarę 120° oraz $|AS| = |CS| = 10$ i $|BS| = |DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

I sposób rozwiązania

Wprowadźmy oznaczenia:

a – długość boku rombu,

e, f – długości przekątnych rombu,

h – wysokość ostrosłupa,

$b = |AS| = |CS|$,

$c = |BS| = |DS|$.

Obliczamy długości przekątnych podstawy.

Z własności trójkąta równobocznego BCD mamy:

$$e = |BD| = a \text{ i } f = 2 \cdot |OC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{zatem } e = 4, \quad f = 4\sqrt{3}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - (2\sqrt{3})^2 = 88,$$

$$h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Obliczamy długość krótszej krawędzi bocznej BS :

Klucz punktowania do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania do zadań otwartych
Poziom podstawowy – czerwiec 2011

$$c = \sqrt{h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2}$$

$$c = \sqrt{88 + 4} = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$$

Obliczamy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej BS ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\sin \beta = \frac{h}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{22}{23}} = \frac{\sqrt{506}}{23}$$

$$\sin \beta \approx 0,9780.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h = 2\sqrt{22}$.

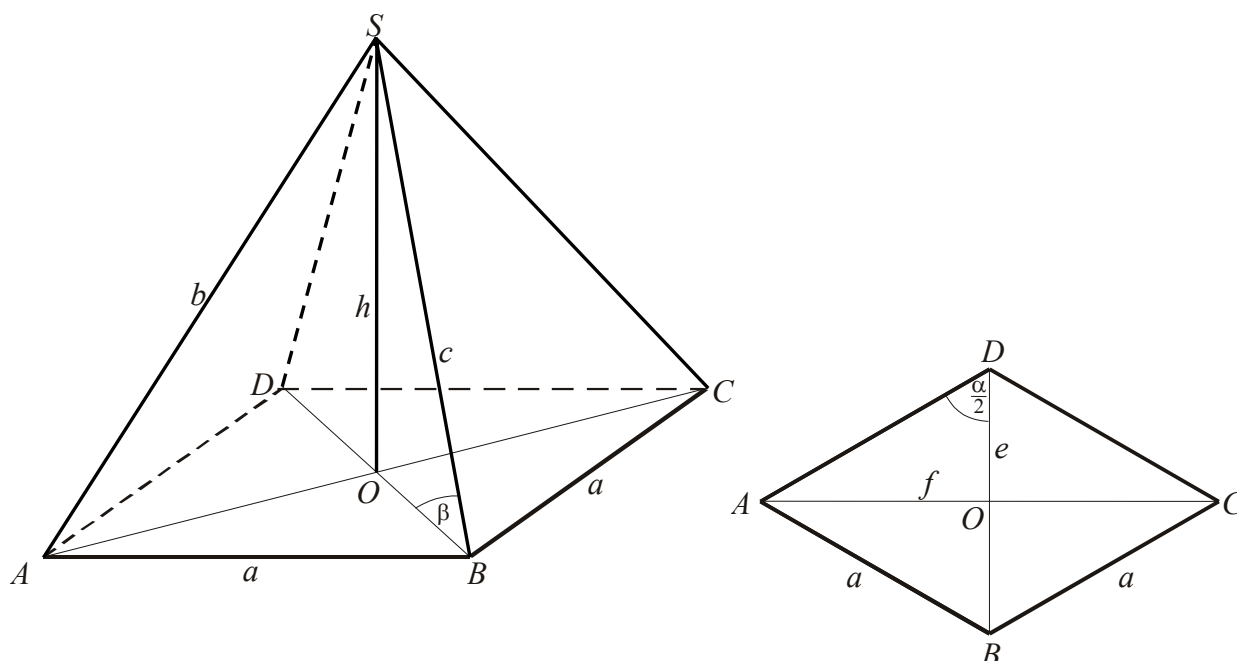
Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie długości krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa: $c = 2\sqrt{23}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $\sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$.

II sposób rozwiązania



Wprowadźmy oznaczenia:

a – długość boku rombu,

e, f – długości przekątnych rombu,

h – wysokość ostrosłupa,

$b = |AS| = |CS|$,

$c = |BS| = |DS|$.

Obliczamy długości przekątnych podstawy.

Z własności trójkąta równobocznego BCD mamy:

$$e = |BD| = a \text{ i } f = 2 \cdot |OC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{zatem } e = 4, \quad f = 4\sqrt{3}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - (2\sqrt{3})^2 = 88,$$

$$h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Obliczamy tangens kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{\frac{e}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{22}.$$

Obliczamy $\sin \beta$ korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$$

$$\sqrt{22} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$$

$$22 = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta}$$

$$\text{Zatem } \sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający korzystając z przybliżonej wartości tangensa kąta β ($\operatorname{tg} \beta = \sqrt{22} \approx 4,6904$) odczyta miarę kąta $\beta \approx 78^\circ$ i następnie zapisze $\sin \beta \approx \sin 78^\circ \approx 0,9781$, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $h = 2\sqrt{22}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

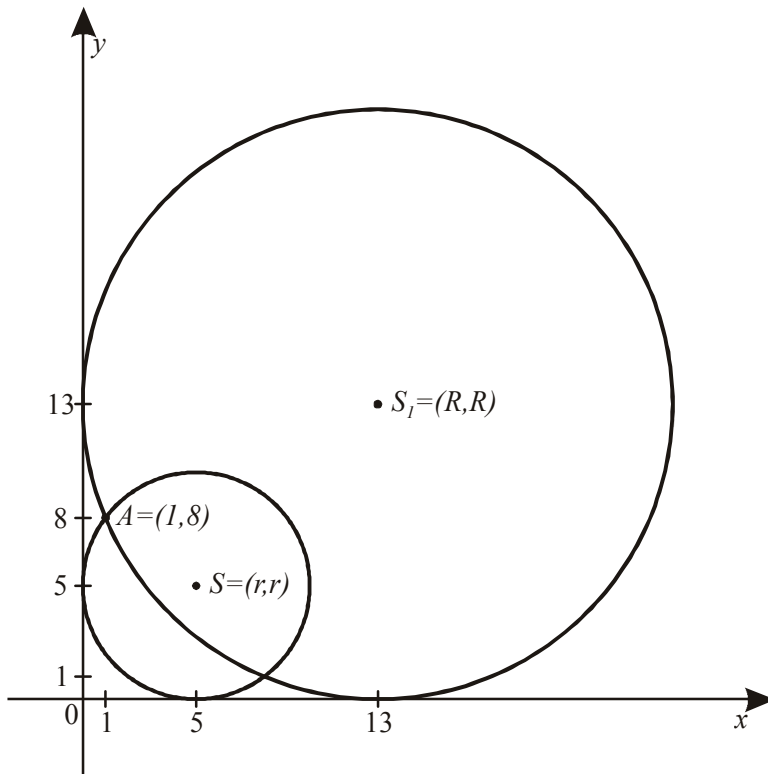
Obliczenie tangensa kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{22}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $\sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$ albo $\sin \beta \approx \sin 78^\circ \approx 0,9781$.

Zadanie 33. (4 pkt)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (1, 8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Rozwiązanie

Ponieważ okrąg jest styczny do obu osi układu współrzędnych i jego środek leży w I ćwiartce układu współrzędnych, więc środek S tego okręgu ma współrzędne $S = (r, r)$, gdzie r jest promieniem tego okręgu. Równanie okręgu ma zatem postać $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Punkt $A = (1, 8)$ leży na tym okręgu, więc $(1-r)^2 + (8-r)^2 = r^2$. Stąd otrzymujemy $r^2 - 18r + 65 = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby: $r = 5$, $r = 13$. To oznacza, że są dwa okręgi spełniające warunki zadania o równaniach $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ i $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zapisanie współrzędnych środka S szukanego okręgu w zależności od promienia r tego okręgu: $S = (r, r)$ lub zapisanie, że środek okręgu leży na prostej o równaniu $y = x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą:

$$(1-r)^2 + (8-r)^2 = r^2 \text{ czyli } r^2 - 18r + 65 = 0.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

Zadanie rozwiązane do końca, ale w trakcie rozwiązania popełniano błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zapisanie równań obu okręgów:

$$\text{w postaci kanonicznej: } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ i } (x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$$

$$\text{lub w postaci ogólnej: } x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze równanie jednego okręgu, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów i stwierdzi, że nie ma innych okręgów spełniających warunki zadania, to otrzymuje **4 punkty**.