

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2019/2020**

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1A1P-203

CZERWIEC 2020

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Wersja A

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	C	B	C	D	A	B	C	A	D	A	B	B	D	B	D	A	B	D	A	C	D	D	C	B	B

Zadanie 1. (0–1)

Zadanie 2. (0–1)

Zadanie 3. (0–1)

Zadanie 4. (0–1)

Zadanie 5. (0–1)

Zadanie 6. (0–1)

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Zadanie 7. (0–1)

Zadanie 8. (0–1)

Zadanie 9. (0–1)

Zadanie 10. (0–1)

Zadanie 11. (0–1)

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Zadanie 12. (0–1)

Zadanie 13. (0–1)

Zadanie 14. (0–1)

Zadanie 15. (0–1)

Zadanie 16. (0–1)

Zadanie 17. (0–1)

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

--	--	--	--

Zadanie 18. (0–1)

Zadanie 19. (0–1)

Zadanie 20. (0–1)

Zadanie 21. (0–1)

Zadanie 22. (0–1)

Zadanie 23. (0–1)

--	--	--	--

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

--	--	--	--

Zadanie 24. (0–1)

Zadanie 25. (0–1)

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $(2x+5)(3x-1) \geq 0$.

Zadanie 26. (0–2)

--	--

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $(2x+5)(3x-1)$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $6x^2 + 13x - 5$:

- podajemy je bezpośrednio z postaci iloczynowej: $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$

albo

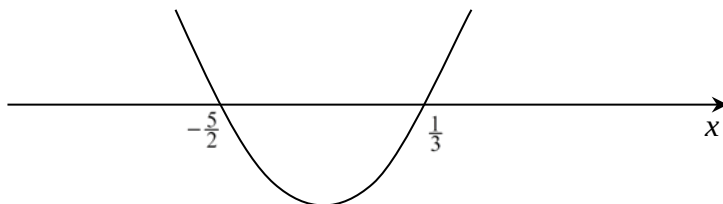
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 289, \sqrt{\Delta} = 17, x_1 = \frac{-13-17}{12} = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{-13+17}{12} = \frac{1}{3}.$$

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności $(2x+5)(3x-1) \geq 0$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ lub $\left(x \leq -\frac{5}{2} \text{ lub } x \geq \frac{1}{3}\right)$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 6x^2 + 13x - 5$.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 6x^2 + 13x - 5$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

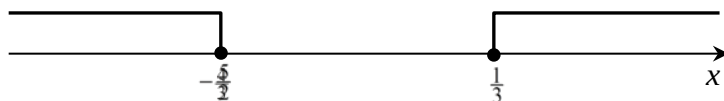
- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$
lub $(x \leq -\frac{5}{2} \text{ lub } x \geq \frac{1}{3})$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający popełnia błąd w przepisywaniu nierówności, np. zapisze $(2x - 5)(3x - 1) \geq 0$, to może otrzymać **1 punkt**, jeśli konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje układ nierówności $2x + 5 \geq 0$ i $3x - 1 \geq 0$ i nie rozpatruje układu $2x + 5 \leq 0$ i $3x - 1 \leq 0$, to może otrzymać **1 punkt** za poprawne wyznaczenie pierwiastków $-\frac{5}{2}$ i $\frac{1}{3}$.
3. Zapisanie przedziału domkniętego w nieskończoności traktujemy jako usterkę nie powodującą utraty punktów.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = -\frac{5}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{3}$ i zapisze, np., $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Dane są liczby $a = 3\log_2 12 - \log_2 27$ i $b = (\sqrt{6} - \sqrt{7})(3\sqrt{6} + 3\sqrt{7})$. Wartością $a - b$ jest liczba całkowita. Oblicz tę liczbę.

Zadanie 27. (0–2)

--	--

Rozwiązanie

Korzystając z własności działań na logarytmach otrzymujemy

$$a = 3\log_2 12 - \log_2 27 = 3\log_2 12 - 3\log_2 3 = 3(\log_2 12 - \log_2 3) = 3\log_2 4 = 6.$$

Wykorzystując wzór skróconego mnożenia obliczamy liczbę b

$$b = (\sqrt{6} - \sqrt{7})(3\sqrt{6} + 3\sqrt{7}) = 3(\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{6} + \sqrt{7}) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

A zatem liczba a jest większa od liczby b o 9.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy obliczy liczbę $a = 6$ albo liczbę $b = -3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy poda, że liczba a jest większa od liczby b o 9.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a < 4$ i $b < 4$, to $ab + 16 > 4a + 4b$.

Zadanie 28. (0–2)

--	--

Rozwiązanie zadania

Nierówność $ab + 16 > 4a + 4b$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$ab - 4a - 4b + 16 > 0,$$

$$a(b - 4) - 4(b - 4) > 0,$$

$$(a - 4)(b - 4) > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż liczby $a - 4$ i $b - 4$ są ujemne, co z kolei wynika z założenia $a < 4$ i $b < 4$, zaś iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy przekształci nierówność $ab + 16 > 4a + 4b$ do postaci iloczynowej np. $(a - 4)(b - 4) > 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

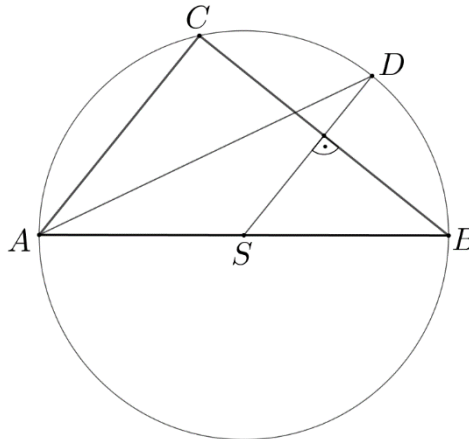
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 29. (0–2)

Bok AB jest średnicą, a punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt D leży na tym okręgu, a prosta SD jest symetralną boku BC trójkąta (zobacz rysunek).



Wykaż, że odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta CAB .

Zadanie 29. (0–2)

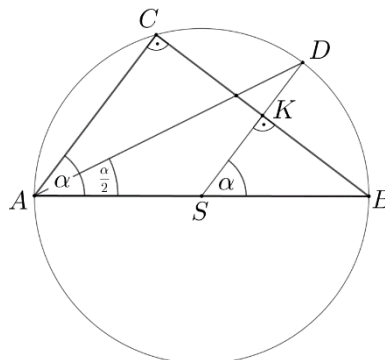
--	--

Rozwiązanie (I sposób)

Punkt D leży na symetralnej odcinka BC , zatem odcinki DC i DB mają równe długości. Stąd wynika, że łuki DC i DB mają równe długości. Kąty CAD i BAD są kątami wpisanymi w okrąg, opartymi na łukach równej długości. Zatem kąty te mają równe miary, czyli odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta CAB .

Rozwiązanie (II sposób)

Bok AB trójkąta jest średnicą okręgu, zatem trójkąt ABC jest prostokątny, a kąt BCA jest prosty. Oznaczmy przez K punkt przecięcia odcinków SD i BC .



Kąt BKS jest prosty, jako kąt wyznaczony przez symetralną odcinka BC . Kąt CBA jest wspólnym kątem wewnętrznym trójkątów ABC i SBK . Jako trójkąty prostokątne, mające wspólny kąt wewnętrzny, trójkąty ABC i SBK są trójkątami podobnymi.

Zatem kąt BSK ma miarę α . Stąd wynika, że kąt rozwarty ASK ma miarę $180^\circ - \alpha$.

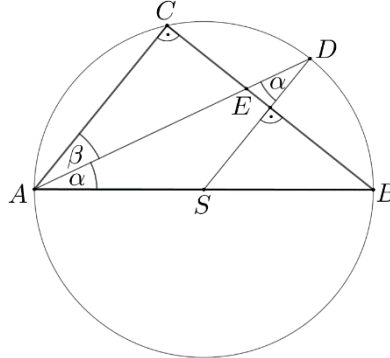
Kąt DAS , jako jeden z dwóch równych kątów w trójkącie równoramiennym ADS , ma miarę

$$\frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem kąt DAS stanowi połowę kąta CAB , czyli odcinek AD jest dwusieczną kąta CAB .

Rozwiązanie (III sposób)

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$ i $\beta = |\sphericalangle CAD|$. Oznaczmy przez E punkt przecięcia odcinków AD i BC .



Trójkąt ASD jest równoramienny, więc $|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SDA| = \alpha$.

Bok AB trójkąta ABC jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie, zatem trójkąt ABC jest prostokątny, a kąt ACB jest prosty. Wobec tego proste AC i SD są równoległe. Stąd z kolei wynika, że kąty naprzemianległe SDA i CAD są równe, czyli $\alpha = \beta$. To kończy dowód,

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.,
gdy

- skorzysta z faktu, że symetralna jest zbiorem punktów równoodległych od końców odcinka, którego jest symetralną i zapisze, że łuki BD i CD mają taką samą długość

albo

- uzasadni, że kąty ABC i BSD mają tę samą miarę

albo

- uzasadni, że proste AC i SD są równoległe

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.,
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 30. (0–2)

Dany jest trzywyrazowy ciąg $(x+2, 4x+2, x+11)$. Oblicz te wszystkie wartości x , dla których ciąg ten jest geometryczny.

Zadanie 30. (0–2)

--	--

Rozwiązanie (I sposób)

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}(4x+2)^2 &= (x+2)(x+11), \\ 16x^2 + 16x + 4 &= x^2 + 13x + 22, \\ 15x^2 + 3x - 18 &= 0, \\ 5x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x-1)(5x+6) &= 0, \\ x &= 1 \text{ lub } x = -\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Dla $x=1$ otrzymujemy ciąg $(3, 6, 12)$ geometryczny o ilorazie 2, zaś dla $x = -\frac{6}{5}$

otrzymujemy ciąg $(\frac{4}{5}, -\frac{14}{5}, \frac{49}{5})$ geometryczny o ilorazie $-\frac{7}{2}$.

Odp. Dla $x=1$ oraz dla $x = -\frac{6}{5}$ otrzymujemy ciąg geometryczny.

Rozwiązanie (II sposób)

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego. Wtedy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy układ równań

$$4x+2 = (x+2)q \text{ i } x+11 = (x+2)q^2.$$

Zauważmy, że dla $x = -2$ otrzymujemy ciąg $(0, -6, 9)$, który nie jest geometryczny. Zatem $x \neq -2$. Wtedy mamy

$$q = \frac{4x+2}{x+2} \text{ i } x+11 = (x+2) \cdot \left(\frac{4x+2}{x+2}\right)^2$$

Stąd

$$\begin{aligned}x+11 &= \frac{(4x+2)^2}{x+2}, \\ (x+2)(x+11) &= (4x+2)^2, \\ 16x^2 + 16x + 4 &= x^2 + 13x + 22, \\ 15x^2 + 3x - 18 &= 0, \\ 5x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x-1)(5x+6) &= 0, \\ x &= 1 \text{ lub } x = -\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Dla $x=1$ otrzymujemy ciąg $(3, 6, 12)$ geometryczny o ilorazie 2, zaś dla $x = -\frac{6}{5}$

otrzymujemy ciąg $(\frac{4}{5}, -\frac{14}{5}, \frac{49}{5})$ geometryczny o ilorazie $-\frac{7}{2}$.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Odp. Dla $x=1$ oraz dla $x=-\frac{6}{5}$ otrzymujemy ciąg geometryczny.

Schemat oceniania rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze

- równanie z niewiadomą x wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.:

$$(4x+2)^2 = (x+2)(x+11)$$

albo

- układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których jedną z niewiadomych jest x , np.: $4x+2=(x+2)q$ i $x+11=(x+2)q^2$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy wszystkie wartości x : $x=1$, $x=-\frac{6}{5}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający odgadnie jedną z szukanych wartości $x=1$ i zapisze dla tej wartości ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeśli zdający zapisze warunek w postaci ilorazowej, ale nie zapisze warunków $x \neq -2$, $x \neq -\frac{1}{2}$ i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)

Prosta k jest nachylona do osi Ox pod kątem ostrym α , takim, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej prostej.

Rozwiązanie

Współczynnik kierunkowy prostej jest równy tangensowi kąta α nachylenia prostej k do osi Ox .

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i wyznaczamy $\sin \alpha$.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ lub } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ponieważ z założenia α jest kątem ostrym, więc $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Zatem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{2}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej k jest równy $\sqrt{2}$.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy wyznaczy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej $k: (\sqrt{2})$.

Uwaga

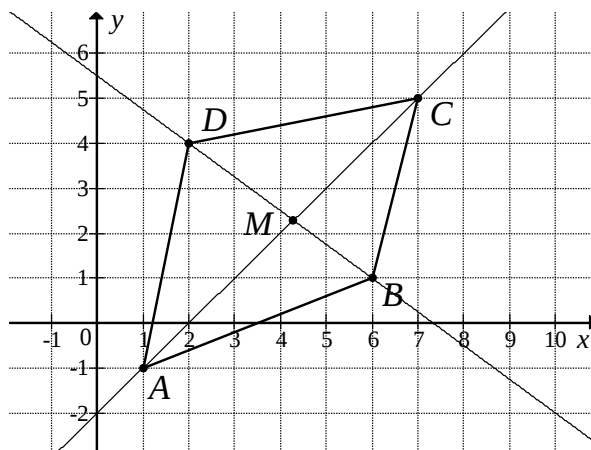
Akceptujemy rozwiązania na przybliżeniach.

Zadanie 31. (0–2)

--	--

Zadanie 32. (0–4)

Punkty $A = (1, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 5)$ i $D = (2, 4)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.

Rozwiązanie

Niech M oznacza punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.

Współczynnik kierunkowy prostej BD jest równy

$$a_{BD} = \frac{4-1}{2-6} = -\frac{3}{4}.$$

Punkt D należy do prostej BD o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + b$.

$$\text{Zatem } 4 = -\frac{3}{4} \cdot 2 + b.$$

$$\text{Czyli } b = \frac{11}{2}.$$

Prosta BD ma równanie:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy

$$a_{AC} = \frac{5+1}{7-1} = 1.$$

Punkt A należy do prostej AC o równaniu $y = x + b$.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Zatem $-1 = 1 + b$.

Czyli $b = -2$.

Prosta AC ma równanie:

$$y = x - 2.$$

Punkt M jest punktem przecięcia prostych AC i BD, więc jego współrzędne obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = x - 2 \text{ i } y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}.$$

Stąd otrzymujemy

$$x - 2 = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2},$$

$$\frac{7}{4}x = \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}.$$

Zatem $y = 4\frac{2}{7} - 2 = 2\frac{2}{7}$, czyli $M = \left(4\frac{2}{7}, 2\frac{2}{7}\right)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej BD: $a = -\frac{3}{4}$

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_1 = 1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze równanie prostej BD, np.: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej AC, np.: $y = x - 2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie prostej BD i równanie prostej AC, np.:

$$y = x - 2 \text{ i } y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}.$$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy współrzędne punktu przecięcia przekątnych czworokąta: $M = \left(4\frac{2}{7}, 2\frac{2}{7}\right)$.

Uwaga

Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

Zadanie 32. (0–4)

--	--

Zadanie 33. (0–4)

Rzucamy 4 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na tym, że liczba otrzymanych orłów będzie różna od liczby otrzymanych reszek.

Rozwiązanie

Sposób I

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czterowyrazowe ciągi utworzone ze zbioru dwuelementowego.

$$\Omega = \{(o, o, o, o), (r, o, o, o), (o, r, o, o), (o, o, r, o), \\ (o, o, o, r), (r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), \\ (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r), (r, r, r, o), \\ (r, r, o, r), (r, o, r, r), (o, r, r, r), (r, r, r, r)\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa 16.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$$(o, o, o, o), (r, o, o, o), (o, r, o, o), (o, o, r, o), (o, o, o, r), \\ (r, r, r, o), (r, r, o, r), (r, o, r, r), (o, r, r, r), (r, r, r, r)$$

$$\text{Zatem } |A| = 10 \text{ i stąd } P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Sposób II

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czterowyrazowe ciągi utworzone ze zbioru dwuelementowego.

$$\Omega = \{(o, o, o, o), (r, o, o, o), (o, r, o, o), (o, o, r, o), \\ (o, o, o, r), (r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), \\ (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r), (r, r, r, o), \\ (r, r, o, r), (r, o, r, r), (o, r, r, r), (r, r, r, r)\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa 16.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

Zdarzenie A' polega na wyrzuceniu tej samej liczby orłów i reszek, zatem sprzyjają mu następujące zdarzenia elementarne:

$(o, o, r, r), (r, r, o, o), (o, r, o, r), (r, o, r, o), (r, o, o, r), (o, r, r, o)$.

Zatem $|A'| = 10$ i stąd $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{16} = \frac{5}{8}$.

Uwaga

Zbiory: Ω , A i A' mogą być zapisane za pomocą drzewa.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 16$
albo
- narysuje pełne drzewo z 16 gałęziami
albo
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A'
albo

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 16$ oraz obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w których liczba orłów jest większa od liczby reszek

albo
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 16$ oraz obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w których liczba orłów jest mniejsza od liczby reszek
albo
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, w których liczba orłów jest różna od liczby reszek $|A| = 10$
albo
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu ($|\Omega| = 16$, $|A'| = 6$)
albo
- zaznaczy na drzewie 10 gałęzi ilustrujących zdarzenie A lub 6 gałęzi ilustrujących zdarzenie A' .

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

- Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 16$ oraz obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, w których liczba orłów jest różna od liczby reszek $|A| = 10$
albo

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

- zaznaczy na drzewie 10 gałęzi ilustrujących zdarzenie A lub 6 gałęzi ilustrujących zdarzenie przeciwne oraz na co najmniej jednej gałęzi każdego etapu zaznaczy prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$
albo
- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $P(A') = \frac{3}{8}$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający pomija przypadki (o, o, o, o) lub (r, r, r, r) , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy $|\Omega| = 16$ i pominie jedno zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie wypisze niepoprawnego zdarzenia oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $|\Omega| = 16$, $|A| = 10$, $P(A) = \frac{5}{8}$ bez uzasadnienia, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 33. (0–4)

--	--

Zadanie 34. (0–5)

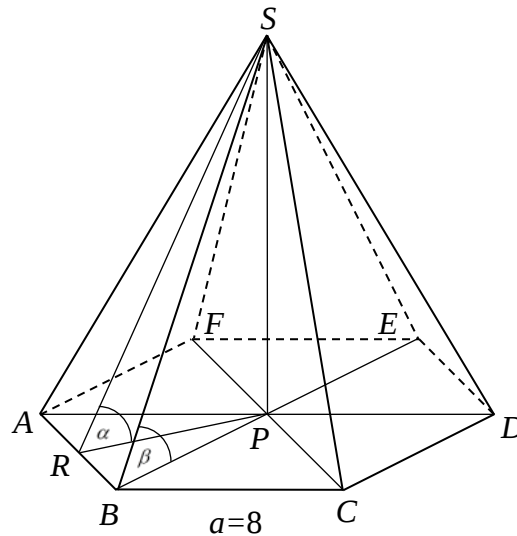
W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym, którego krawędź podstawy ma długość 8, ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy po kątem $\alpha = 60^\circ$. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

Zadanie 34. (0–5)

--	--

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.



Odcinek PR jest wysokością trójkąta równobocznego o boku $a = 8$, zatem

$$|PR| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Z trójkąta prostokątnego SPR , w którym kąty mają miary 90° , 60° , 30° , obliczamy długość odcinka SR , np. $\frac{|PR|}{|SR|} = \cos 60^\circ$. Zatem $|SR| = 8\sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SRB , który jest prostokątny, obliczamy długość krawędzi bocznej.

$$|SB|^2 = |SR|^2 + |RB|^2$$

$$|SB|^2 = (8\sqrt{3})^2 + 4^2$$

$$|SB|^2 = 192 + 16$$

$$|SB|^2 = 208$$

$$\text{Zatem } |SB| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$\text{Z trójkąta } SPB, \text{ który jest prostokątny, otrzymujemy } \cos \beta = \frac{|BP|}{|SB|} = \frac{8}{4\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- prawidłowo zaznaczy na rysunku kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy

albo

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*

- obliczy długość odcinka $|PR| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.
Zdający

- obliczy wysokość ściany bocznej (długość odcinka SR , np. $\frac{|PR|}{|SR|} = \cos 60^\circ$):

$$|SR| = 8\sqrt{3}$$

albo

- obliczy wysokość ostrosłupa (długość odcinka SP , np. $\frac{|SP|}{|RP|} = \tan 60^\circ$): $|SP| = 12$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.
Zdający

- obliczy długość krawędzi bocznej ostrosłupa $|SB| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$

albo

- zapisze, że $\tan \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta}$, gdzie β jest kątem między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający obliczy długość krawędzi bocznej ostrosłupa $|SB| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$.

Rozwiązanie pełne, ale z usterkami 4 p.
Rozwiązanie pełne 5 p

Zdający

- zaznaczy kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy i obliczy cosinus tego

$$\text{kąta } \cos \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

albo

- prawidłowo opíše stosunek odpowiednich boków w trójkącie $\triangle SPB$, $\cos \beta = \frac{|BP|}{|SB|} =$

$$\frac{8}{4\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Uwaga

Jeżeli uczeń rozważa graniastosłup lub w ostrosłupie błędnie interpretuje kąty otrzymuje
0 punktów.

*Zasady oceniania rozwiązań zadań
poziom podstawowy*
