

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

**FORMUŁA OD 2015
„NOWA MATURA”
i
FORMUŁA DO 2014
„STARA MATURA”**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

SIERPIEŃ 2019

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Wersja A/C

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	B	C	C	C	D	D	C	A	B	A	C	B	A	B	A	D	A	B	C	D	A	D	D

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Iloczyn jest równy 0, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy 0.

Zatem $x^2 - 16 = 0$ lub $x^3 - 1 = 0$.

Równanie $x^2 - 16 = 0$ ma dwa rozwiązania $x = 4$ i $x = -4$.

Równanie $x^3 - 1 = 0$ ma jedno rozwiązanie $x = 1$.

Zatem rozwiązaniami równania $(x^2 - 16)(x^3 - 1) = 0$ są liczby: $x = 4$, $x = -4$ oraz $x = 1$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania $x^2 - 16 = 0$ i $x^3 - 1 = 0$ lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania

albo

- wyznaczy poprawnie lub poda rozwiązania jednego z równań: $x^2 - 16 = 0$ lub $x^3 - 1 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x = 4$, $x = -4$ oraz $x = 1$, ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisanych rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów, znajdzie trzy rozwiązania: $-4, 1, 4$, ale nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli na etapie przyrównywania czynników do zera jedynym błędem zdającego jest błąd przy rozkładzie wielomianu $x^3 - 1$, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 - 5x + 3$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 5x + 3$
 - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
 $\Delta = -5 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1^2$ i stąd $x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ oraz $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
 - albo
 - stosujemy wzory Viète'a:
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$, stąd $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$.

Drugi etap rozwiązania.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ lub $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności;
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

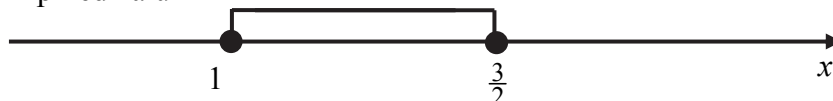
- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ lub $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$, lub $x \leq \frac{3}{2} \wedge x \geq 1$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x \leq \frac{3}{2}$ lub $x \geq 1$, $x \leq \frac{3}{2}$ oraz $x \geq 1$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left\langle \frac{3}{2}, 1 \right\rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$.

Z założenia wiemy, że $x > 0$, zatem możemy pomnożyć nierówność obustronnie przez x i kolejno otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 - x &\geq x, \\ x^2 - 2x + 1 &\geq 0, \\ (x-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Z lewej strony nierówności występuje wyrażenie przyjmujące wartość nieujemną, bo jest ono kwadratem liczby rzeczywistej. Zatem nierówność $x + \frac{1-x}{x} \geq 1$ jest prawdziwa.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zapisze nierówność równoważną w postaci

- zawierającej po jednej stronie 0, a po drugiej sumę jednomianów lub iloraz wielomianów, np.:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ lub } \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$

albo

- $x + \frac{1}{x} - 1 \geq 1$.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

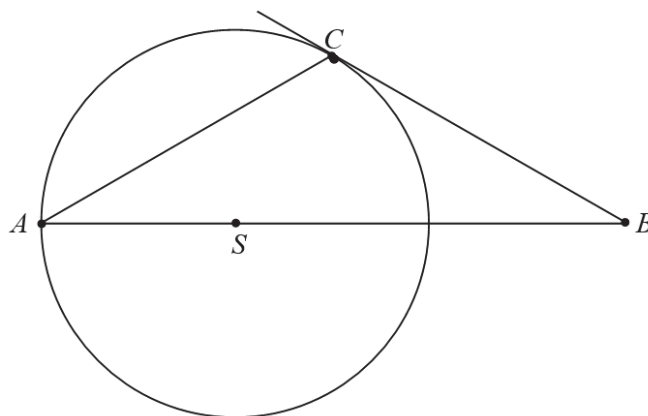
1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości x , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

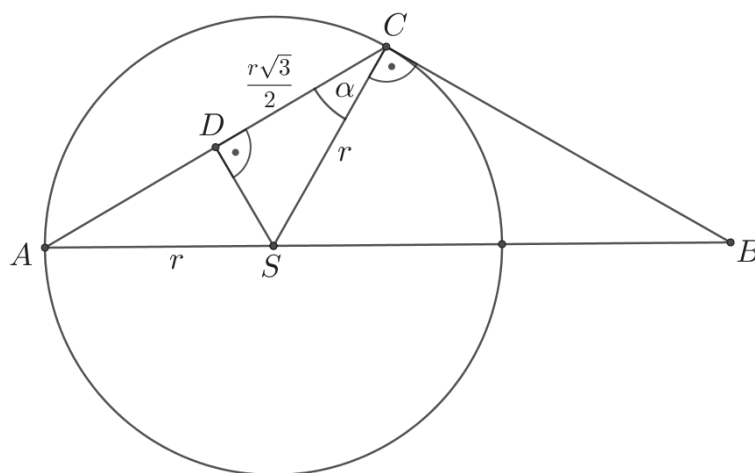
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność $(x-1)^2 \geq 0$ i stwierdzi zakończenie dowodu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ i nie zapisze uzasadnienia jej prawdziwości, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 29. (0–2)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r , a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C , a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę 120° .

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

Zauważmy, że prosta BC , jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka SC , tj. do promienia okręgu. W trójkącie równoramiennym ACS prowadzimy wysokość SD .



Obliczamy cosinus kąta ostrego ACS :

$$\cos \alpha = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

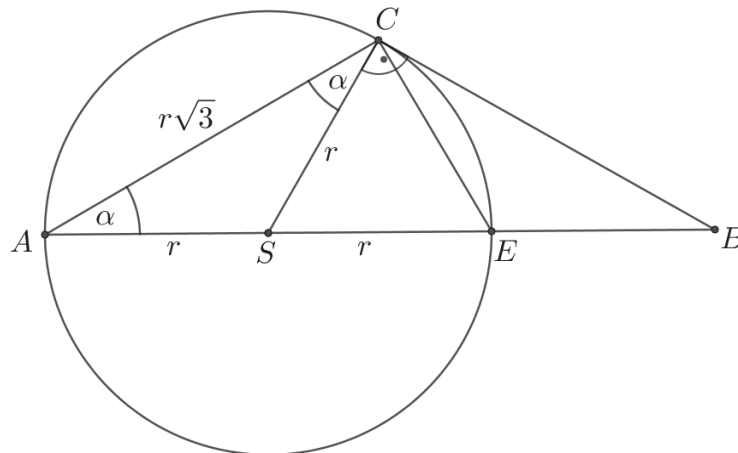
Stąd wynika, że $|\sphericalangle ACS| = \alpha = 30^\circ$.

Kąt ACB jest sumą kątów ACS i BCS , zatem ma miarę $30^\circ + 90^\circ$, czyli 120° .
To kończy dowód.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

II sposób

Poprowadźmy promień SC i odcinek CE , gdzie E jest punktem przecięcia okręgu z odcinkiem AB .



Prosta BC , jako styczna do okręgu, jest prostopadła do odcinka SC .

Kąt ACE jest prosty, gdyż jest kątem wpisanym w okrąg opartym na półokręgu. Zatem trójkąt ACE jest prostokątny, w którym $|AC| = r\sqrt{3}$ oraz $|AE| = 2r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACE otrzymujemy

$$|CE|^2 = |AE|^2 - |AC|^2 = (2r)^2 - (r\sqrt{3})^2 = r^2,$$

stąd

$$|CE| = r.$$

To oznacza, że trójkąt SCE jest równoboczny, więc kąt CSE jest równy 60° . Zatem kąt wpisany CAE , oparty na tym samym łuku co kąt środkowy CSE jest równy $\alpha = 30^\circ$.

Trójkąt ACS jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CAS| = 30^\circ$.

Kąt ACB jest sumą kątów ACS i BCS , zatem ma miarę $30^\circ + 90^\circ$, czyli 120° .

To kończy dowód.

Uwaga

Miarę kąta ACS (lub kąta ASC) możemy też obliczyć, wykorzystując twierdzenie cosinusów w trójkącie ACS . Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} |AS|^2 &= |AC|^2 + |CS|^2 - 2|AC| \cdot |CS| \cdot \cos \alpha, \\ r^2 &= (r\sqrt{3})^2 + r^2 - 2 \cdot r\sqrt{3} \cdot r \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Stąd

$$\cos \alpha = \frac{3r^2}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $\alpha = 30^\circ$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- wyznaczy miarę jednego z kątów ACS , CAS , ASC , SCE , wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym CDS lub ADS lub ACE lub twierdzenie Pitagorasa albo

- obliczy cosinus jednego z kątów ACS , CAS , ASC

□ na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt BCS jest prosty oraz zapisze bez uzasadnienia, że kąt ACS jest równy 30° , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba w zapisie dziesiętnym ma cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Przykładowe rozwiązania**I sposób** (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb (a, b) , gdzie $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na otrzymaniu w wyniku losowania par liczb (a, b) , spełniających warunki: $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa $|A| = 5 \cdot 5 = 25$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

II sposób (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy przedstawić w prostokątnej tablicy. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu zaznaczamy symbolem x

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x		x		x		x		x
1									
2	x		x		x		x		x
3									
4	x		x		x		x		x
5									
6	x		x		x		x		x
7									
8	x		x		x		x		x
9									

Stąd $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$, $|A| = 5 \cdot 5 = 25$.

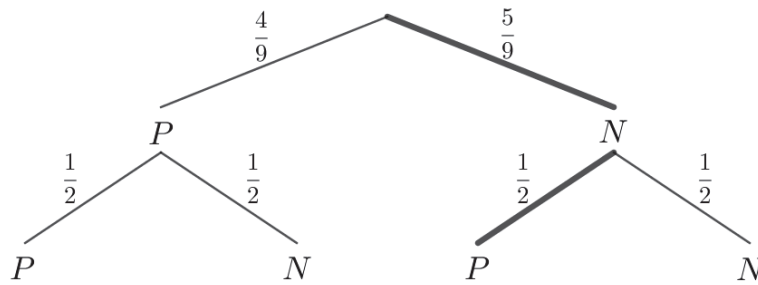
Zatem $P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

III sposób (metoda drzewka)

Przedstawiamy model graficzny doświadczenia.

P – oznacza liczbę parzystą, N – nieparzystą.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy



Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu A . Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 90$

albo

- wyznaczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 25$ i nie wskaże przy tym zdarzeń elementarnych niesprzyjających zdarzeniu A ,

albo

- zapisze przy stosowaniu drzewa probabilistycznego na dwóch etapach prawdopodobieństwa potrzebne do wyznaczenia końcowego wyniku oraz wskaże wszystkie sytuacje sprzyjające rozważanemu zdarzeniu,

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{18}$, $P(A) = \frac{25}{90}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze o jedno za mało lub jedno powtórzy, ale nie wypisze żadnego niewłaściwego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.
3. Jeżeli zdający stosuje rozbudowane drzewo probabilistyczne, w którym przynajmniej pięć gałęzi odpowiada sytuacjom sprzyjającym rozważanemu zdarzeniu, i zdający pominie jedną z takich gałęzi, to może otrzymać **1 punkt**, jeśli doprowadzi rozumowanie do końca.
4. Jeżeli zdający zapisze tylko sam wynik końcowy: $P(A) = \frac{25}{90}$ lub $P(A) = \frac{5}{18}$, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko: $|A| = 25$, $|\Omega| = 90$, $P(A) = \frac{25}{90}$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający zapisze prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–2)

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(-\frac{21}{2}, -1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD .

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe, więc prosta BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt S . Zatem prosta BD ma równanie postaci:

$$y = -3x + b.$$

Współrzędne punktu S spełniają to równanie, zatem

$$-1 = -3 \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) + b.$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$b = -1 - \frac{63}{2} = -\frac{65}{2}.$$

Równanie prostej BD to:

$$y = -3x - \frac{65}{2}$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy poprawnie zapisze współczynnik kierunkowy prostej BD , prostopadłej do prostej AC :
 $a = -3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy wyznaczy równanie prostej BD : $y = -3x - \frac{65}{2}$.

Zadanie 32. (0–4)

W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, \dots, a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązanie

Niech r oznacza różnicą rozważanego ciągu arytmetycznego.

Suma wyrazów o numerach parzystych tego ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 + r$ i różnicy $2r$.

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340.$$

Z kolei suma wyrazów o numerach nieparzystych rozważanego w treści zadania ciągu to suma dwudziestu początkowych wyrazów innego ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $2r$.

Stąd możemy zapisać równanie:

$$\frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400.$$

Rozwiążemy układ równań:

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

$$\begin{cases} \frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \\ \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400. \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} (a_1 + 20r) \cdot 20 = 1340 \\ (a_1 + 19r) \cdot 20 = 1400, \\ a_1 + 20r = 67 \\ a_1 + 19r = 70. \end{cases}$$

Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego otrzymujemy:

$$r = -3,$$

a następnie:

$$a_1 = 127.$$

Obliczamy ostatni wyraz rozważanego ciągu:

$$a_{40} = 127 + 39 \cdot (-3) = 10.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze jedno równanie z dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \text{ lub } \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400, \text{ lub } \frac{2a_1 + 39r}{2} \cdot 40 = 2740,$$

$$\text{lub } \frac{a_2 + a_{40}}{2} \cdot 20 = 1340, \text{ lub } \frac{a_1 + a_{39}}{2} \cdot 20 = 1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze dwa nierównoważne równania z tymi samymi dwiema niewiadomymi, wynikające z treści zadania, np.:

$$\frac{a_1 + r + a_1 + r + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1340 \text{ oraz } \frac{a_1 + a_1 + 19 \cdot 2r}{2} \cdot 20 = 1400$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy wyraz a_1 i różnicę r rozważanego w zadaniu ciągu arytmetycznego:

$$a_1 = 127, r = -3,$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy czterdziesty wyraz rozważanego ciągu: $a_{40} = 10$.

Uwagi

- Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

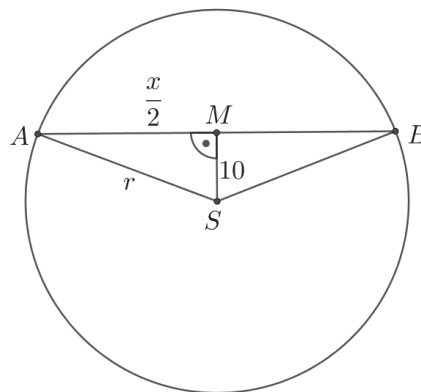
2. Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzi, np. obliczając sumy odpowiednich składników, że wybrany ciąg spełnia warunki zadania, i wyznaczy $a_{40} = 10$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze jedynie $a_1 = 127$, $r = -3$ i $a_{40} = 10$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający pomyli sumy i przyjmie, że suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 1400, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 1340 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający, zapisując równania z sumą dwudziestu wyrazów ciągu, próbuje wypisać wszystkie 20 wyrazów i pominie w równaniu jeden lub dwa wyrazy ciągu, ale konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

Przykładowe rozwiązanie

Niech A i B oznaczają końce rozpatrywanej cięciwy, niech S i r będą odpowiednio środkiem i promieniem okręgu, oraz niech x oznacza długość cięciwy AB .



Odległość środka S okręgu od cięciwy AB jest długością odcinka łączącego punkt S z środkiem M tej cięciwy. Zatem $|AM| = \frac{x}{2}$.

Odcinek MS jest prostopadły do cięciwy AB . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AMS otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2,$$

$$r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10^2.$$

Z treści zadania wynika, że $x = r + 22$. Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą r

$$r^2 = \left(\frac{r+22}{2}\right)^2 + 10^2,$$

$$r^2 = \frac{1}{4}r^2 + 11r + 121 + 100,$$

$$\frac{3}{4}r^2 - 11r - 221 = 0.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe. Możemy wyznaczyć wyróżnik trójmianu kwadratowego, a następnie obliczyć rozwiązania.

Obliczamy wyróżnik Δ :

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (-221) = 121 + 663 = 784 = 28^2.$$

Obliczamy dwie wartości r :

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

$$r_1 = \frac{11-28}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{-17}{2 \cdot \frac{3}{4}} < 0, \text{ ta wartość jest ujemna i nie może być długością odcinka,}$$

$$\text{oraz } r_2 = \frac{11+28}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{39}{\frac{3}{4}} = \frac{39 \cdot 2}{3} = 26.$$

Zatem promień okręgu jest równy 26.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- rozważa trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątną jest promień r okręgu, a przyprostokątnymi są: odcinek o długości 10 i odcinek o długości połowy rozważanej cięciwy (zdający może przedstawić sytuację na rysunku pomocniczym)

albo

- zapisze zależność między promieniem i długością rozważanej cięciwy, np.: $x = r + 22$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze zależność, wynikającą z twierdzenia Pitagorasa, np.:

$$10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np. r (r oznacza promień okręgu):

$$10^2 + \left(\frac{r}{2} + 11\right)^2 = r^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający stwierdzi, że zadanie ma jedno rozwiązanie i poprawnie obliczy promień okręgu: $r = 26$.

Uwagi

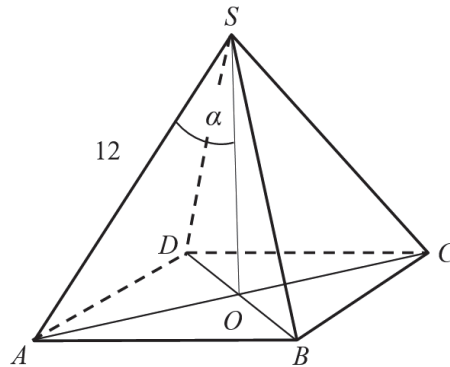
- Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
- Jeżeli jedynym błędem jest niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, np. pomylenie przyprostokątnej z przeciwprostokątną, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 34. (0–5)

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD$ jest równa 12. (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt α taki, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Oblicz objętość tego ostrosłupa.}$$

Schemat oceniania
Poziom podstawowy



Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wprowadzamy oznaczenia: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$, $|SO| = H$.

Trójkąt AOS jest prostokątny, zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{H} = \frac{a\sqrt{2}}{2H}$, czyli $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Stąd $a = \frac{4H}{\sqrt{10}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS dostajemy

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2,$$

$$H^2 + \frac{1}{2}a^2 = 144.$$

Otrzymujemy więc równanie z jedną niewiadomą H

$$H^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4H}{\sqrt{10}}\right)^2 = 144,$$

$$H^2 + \frac{4}{5}H^2 = 144,$$

$$\frac{9}{5}H^2 = 144$$

$$H^2 = \frac{5}{9} \cdot 144 = 16 \cdot 5.$$

Stąd $H = 4\sqrt{5}$ oraz $a = \frac{4H}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = 8\sqrt{2}$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}(8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$

II sposób

Wprowadzamy oznaczenia $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$, $|SO| = H$.

Z treści zadania wiemy że, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, zatem $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Stąd $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ otrzymujemy

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{4}{5} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{9}{5} \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}.$$

Stąd $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, gdyż α jest kątem ostrym. Zatem $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}$.

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

Z trójkąta prostokątnego AOS otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{24} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{|AO|}{12} = \frac{H}{12}.$$

Zatem

$$\frac{a\sqrt{2}}{24} = \frac{2}{3} \text{ oraz } \frac{H}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$a = 8\sqrt{2} \text{ oraz } H = 4\sqrt{5}.$$

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}(8\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$.

III sposób

Z treści zadania wiemy że, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Wprowadzamy oznaczenia w trójkącie AOS : $|AO| = 2x$, $|SO| = \sqrt{5}x$ i zapisujemy równanie $(2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 = 12^2$. Rozwiązaniem tego równania jest $x = 4$.

Stąd otrzymujemy $|SO| = \sqrt{5}x = 4\sqrt{5} = H$ (wysokość ostrosłupa) i $|AC| = 4x = 16$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC|^2 \cdot H = \frac{1}{6} \cdot 16^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{512\sqrt{5}}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający:

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi a podstawy oraz wysokością H ostrosłupa: $\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

albo

- zapisze zależność pomiędzy długością krawędzi a podstawy oraz wysokością H ostrosłupa: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$,

albo

- zapisze zależność $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

albo

- zapisze zależność $\frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

albo

- zapisze zależność $|AO|^2 + |SO|^2 = 12^2$,

albo

- wprowadzi oznaczenia: $|AO| = 2x$, $|SO| = \sqrt{5}x$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a oraz H , np.: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 12^2$ oraz

$$\frac{a\sqrt{2}}{2H} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Schemat oceniania
Poziom podstawowy

albo

- zapisze równanie trygonometryczne, w którym wystąpi jedna funkcja trygonometryczna, np.: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$,

albo

- zapisze równanie $(2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 = 12^2$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy

- wysokość ostrosłupa: $H = 4\sqrt{5}$

albo

- długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 8\sqrt{2}$,

albo

- długość przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC| = 16$,

albo

- współczynnik proporcjonalności: $x = 4$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = 4\sqrt{5}$ oraz długość

- krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 8\sqrt{2}$

lub

- przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC| = 16$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{512\sqrt{5}}{3}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe lub przy przepisywaniu, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędzią boczną i wysokością tego ostrosłupa, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje, że krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 12, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
5. Jeżeli jedynym błędem jest:
 - a) niepoprawne wyznaczenie długości przekątnej kwadratu, ale niebędące skutkiem ujawnionego błędu rachunkowego,
 - b) niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
 to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnia innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwadze 5. a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeśli zdający obliczy $x = 4$ i zapisze objętość ostrosłupa w zależności od x , ale nie poda wyniku liczbowego, to otrzymuje **4 punkty**.