

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	12 maja 2025 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	27 czerwca 2025 r.

**Uwagi ogólne:**

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

**Zadanie 1. (0–2)**

Wymagania określone w podstawie programowej <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 25%.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $k$ , np.  $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga.**

Jeżeli zdający odgadnie wynik i sprawdzi, że wartość 25% spełnia warunki zadania oraz uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie (np. powołując się na to, że funkcja wykładnicza jest rosnąca), to otrzymuje **2 punkty**; natomiast jeżeli takiego uzasadnienia nie przedstawi, to otrzymuje **1 punkt**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Z warunków zadania  $N(0) = 10\,000$ , więc  $10\,000 = N_0 \cdot k^0$  i stąd  $N_0 = 10\,000$ .

Ponieważ  $N(2) = 15\,625$ , więc  $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$  i stąd  $k = 1,25$ . Zatem

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{N_0 \cdot k^{t+1}}{N_0 \cdot k^t} = k = 1,25$$

dla każdego  $t \geq 0$ . To oznacza, że w ciągu każdej godziny liczebność populacji zwiększała się o 25%.

<sup>1</sup>Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

**Zadanie 2. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R5) korzysta ze wzorów na: [...] $(a + b)^n$ [...].

**Zasady oceniania**

- 3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania (tj. spełnienie kryterium za 2 punkty **oraz** zapisanie, że  $a + 2b > 0$  **oraz** uzasadnienie, że dla liczb spełniających warunek  $b \neq \frac{1}{2}a$  zachodzi  $(a - 2b)^2 > 0$ ).
- 2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci  $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$   
ALBO  
– przekształcenie nierówności do postaci  $(a - 2b)^2 > 0$ ,  
ALBO  
– uzasadnienie, że funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą dla  $a = 2b$ .
- 1 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian sumy i przekształcenie nierówności do postaci  $a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$   
ALBO  
– przekształcenie nierówności do postaci  $(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$ ,  
ALBO  
– przekształcenie nierówności do postaci  $(a + 2b)^2 > 8ab$ ,  
ALBO  
– rozważenie funkcji  $f(a) = a^3 - 2ba^2 - 4b^2a + 8b^3$  określonej dla  $a > 0$  oraz obliczenie pochodnej tej funkcji i miejsca zerowego tej pochodnej:  
 $f'(a) = 3a^2 - 4ba - 4b^2$  oraz  $a = 2b$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga.**

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

$$a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3 > 0$$

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

$$(a - 2b)(a^2 - 4b^2) > 0$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia  $a > 0$  i  $b > 0$ , więc  $a + 2b > 0$ .

Ponieważ  $b \neq \frac{1}{2}a$ , więc  $a - 2b \neq 0$  i wtedy  $(a - 2b)^2 > 0$  jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem  $(a - 2b)^2(a + 2b)$  jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność  $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby dodatniej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ . To oznacza, że również nierówność  $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$  jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby dodatniej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ . To należało wykazać.

### Sposób II

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i różnicy:

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a + 2b)^3 > 8ab(a + 2b)$$

$$(a + 2b)^3 - 8ab(a + 2b) > 0$$

$$(a + 2b)[(a + 2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a + 2b)(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$$

Z założenia  $a > 0$  i  $b > 0$ , więc  $a + 2b > 0$ .

Ponieważ  $b \neq \frac{1}{2}a$ , więc  $a - 2b \neq 0$  i wtedy  $(a - 2b)^2 > 0$  jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.

Zatem  $(a - 2b)^2(a + 2b)$  jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność  $(a - 2b)^2(a + 2b) > 0$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby dodatniej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ . To oznacza, że również nierówność  $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$  jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby dodatniej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ . To należało wykazać.

### Sposób III

Niech  $f$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(a) = (a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2$  dla każdego  $a \in (0, +\infty)$ .

Obliczamy pochodną funkcji  $f$  oraz jej miejsca zerowe:

$$f'(a) = 3(a + 2b)^2 - 16ba - 16b^2$$

$$3a^2 + 12ab + 12b^2 - 16ba - 16b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$3a^2 - 4ba - 4b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$\left( a = -\frac{2}{3}b \quad \vee \quad a = 2b \right) \quad \wedge \quad a > 0$$

Gdy  $b > 0$ , to  $f'(a) > 0$  dla  $a \in (2b, +\infty)$  oraz  $f'(a) < 0$  dla  $a \in (0, 2b)$ . Zatem przy  $b$  dodatnim funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(0, 2b]$  oraz rosnąca w przedziale  $[2b, +\infty)$ , czyli funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą dla argumentu dodatniego  $a = 2b$ . Ta najmniejsza wartość jest równa  $f(2b) = (2b + 2b)^3 - 8 \cdot (2b)^2 \cdot b - 16 \cdot 2b \cdot b^2 = 0$ . Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $b$  takich, że  $a \neq 2b$ , prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

To należało wykazać.

### Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

#### Zasady oceniania (dla sposobów I oraz VI)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $45^\circ$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów:  $CAD$ ,  $BAD$ ,  $CDA$ ,  $ADB$ , w którym wszystkie funkcje trygonometryczne są tego samego argumentu, np.

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\sphericalangle CAD|,$$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AD$ :  $2 - \sqrt{3}$ .

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów:  $CAD$ ,  $BAD$ ,  $CDA$ ,  $ADB$ ,

$$\text{np. } \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ gdzie } \alpha = |\sphericalangle CAD|,$$

ALBO

– zapisanie związku  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Zasady oceniania (dla sposobu II)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $45^\circ$ .

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

2 pkt – wyznaczenie długości czterech spośród pięciu odcinków:  $BD$ ,  $CD$ ,  $CE$ ,  $DE$ ,  $AE$ ,  
w zależności od jednej zmiennej, np.  $|CD| = x$  i  $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$  i  $|CE| = \frac{1}{2}x$

$$\text{i } |AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków:  $BD$ ,  $CD$ ,  $CE$ , w zależności od długości odcinka  $AE$

$$\text{i tangensa kąta } DAC, \text{ np. } |CE| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ i } |CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{i } |BD| = |AE| - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \text{ jest kątem } DAC.$$

1 pkt – zapisanie związku  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,

ALBO

– wyznaczenie długości dwóch odcinków spośród  $BD$ ,  $BC$  i  $CD$  w zależności od

$$\text{jednej zmiennej, np. } |CD| = x \text{ i } |BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x,$$

ALBO

– wyznaczenie długości boków trójkąta  $CED$  w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = x, |CE| = \frac{1}{2}x, |DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka  $CE$  (albo  $CD$ ) w zależności od długości odcinka  $AE$

$$\text{i tangensa kąta } DAC: |CE| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ (albo } |CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg} \alpha), \text{ gdzie } \alpha \text{ jest kątem } DAC.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Zasady oceniania (dla sposobów III–V)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $45^\circ$ .

2 pkt – obliczenie  $\frac{|BD|}{|DF|}$  oraz  $\frac{|AB|}{|AF|} : \frac{|BD|}{|DF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  oraz  $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków  $AD$  oraz  $CD$  w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|AD| = \sqrt{6}m \text{ oraz } |CD| = 2m.$$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków  $BD$  i  $CD$  w zależności od jednej zmiennej, np.

$$|CD| = 2m \text{ i } |BD| = (\sqrt{3}-1)m.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

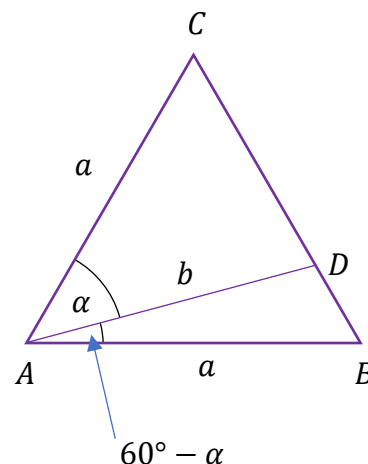
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a$  – długość boku trójkąta  $ABC$ ,

$b$  – długość odcinka  $AD$ ,

$\alpha$  – miara kąta  $DAC$

(zobacz rysunek).



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Stąd i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin 60^\circ \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Zatem kąt  $DAC$  ma miarę  $45^\circ$ .

### Sposób II

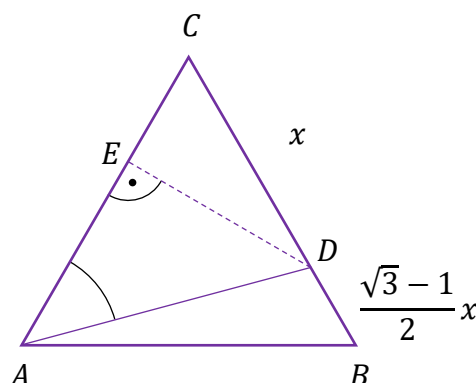
Trójkąty  $ABD$  i  $ACD$  mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka  $A$ , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy  $x = |CD|$ . Wtedy  $|BD| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$ . Niech  $E$  będzie spodkiem wysokości trójkąta  $ADC$  poprowadzonej z wierzchołka  $D$  (zobacz rysunek).



Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

Z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  otrzymujemy  $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$  oraz  $|EC| = \frac{1}{2}x$ .  
Ponieważ  $|AE| + |EC| = |CD| + |DB|$ , więc

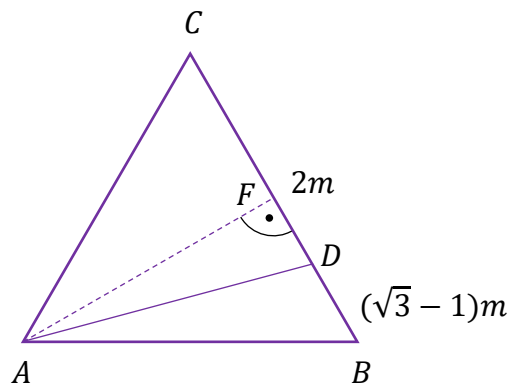
$$|AE| + \frac{1}{2}x = x + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}x$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem  $|AE| = |DE|$ . To oznacza, że trójkąt prostokątny  $DEA$  jest równoramienny i kąt  $DAC$  ma miarę  $45^\circ$ .

### Sposób III (z twierdzenia o dwusiecznej)

Niech  $F$  będzie spodkiem wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $A$ . Trójkąty  $ABD$  i  $ADC$  mają wspólną wysokość  $AF$ , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem  $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$  oraz  $|CD| = 2m$ , przy pewnym  $m > 0$  (zobacz rysunek).



Wtedy  $|AB| = |BC| = (\sqrt{3} + 1)m$ ,  $|AF| = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}}{2}m$  oraz

$|BF| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m$ . Stąd

$$|DF| = |BF| - |BD| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}m - (\sqrt{3} - 1)m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m$$

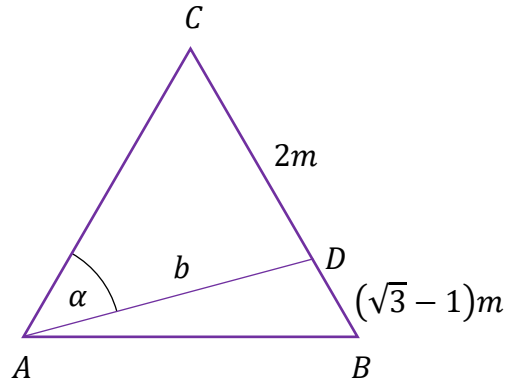
Ponieważ  $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{(\sqrt{3} - 1)m}{\frac{(3 - \sqrt{3})m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  oraz  $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{(\sqrt{3} + 1)m}{\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3}m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , więc półprosta  $AD$

jest dwusieczną kąta  $BAF$ . To oznacza, że

$|\sphericalangle DAF| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAF| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$  oraz  $|\sphericalangle DAC| = 30^\circ + |\sphericalangle DAF| = 45^\circ$ .

**Sposób IV (z twierdzenia cosinusów i sinusów / dwukrotnie z twierdzenia cosinusów)**

Oznaczmy kąt  $CAD$  przez  $\alpha$ , natomiast długość odcinka  $AD$  oznaczmy przez  $b$ . Trójkąty  $ABD$  i  $ADC$  mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $A$  na prostą  $BC$ , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem  $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$  oraz  $|CD| = 2m$ , przy pewnym  $m > 0$  (zobacz rysunek).



Wtedy  $|AB| = |BC| = |CA| = (\sqrt{3} + 1)m$ .

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ADC$ :

$$b^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ$$

$$b^2 = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (2m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot 2m \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 = (4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2) \cdot m^2$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta  $ADC$  i otrzymujemy

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{2m}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{6}m}{\sin 60^\circ} = \frac{2m}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem  $|\sphericalangle DAC| = 45^\circ$ .

**Uwaga.**

Zamiast  $\sin \alpha$  możemy też obliczyć  $\cos \alpha$ , korzystając po raz drugi z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$ :

$$|CD|^2 = |AC|^2 + b^2 - 2 \cdot |AC| \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$(2m)^2 = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha = [(\sqrt{3} + 1)m]^2 + (\sqrt{6}m)^2 - (2m)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + 6 - 4}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem  $|\sphericalangle DAC| = 45^\circ$ .

#### Sposób V (z twierdzenia Stewarta)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a$  – długość boku trójkąta  $ABC$ ,

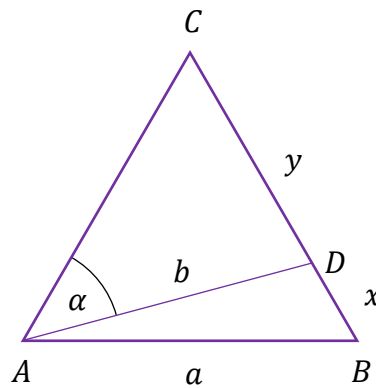
$b$  – długość odcinka  $AD$ ,

$x$  – długość odcinka  $BD$ ,

$y$  – długość odcinka  $CD$ ,

$\alpha$  – miara kąta  $DAC$

(zobacz rysunek).



Trójkąty  $ABD$  i  $ADC$  mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka  $A$  na prostą  $BC$ , więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem  $x = (\sqrt{3} - 1)m$  oraz  $y = 2m$ , przy pewnym  $m > 0$ .

Wtedy  $a = (\sqrt{3} + 1)m$ .

Stosujemy twierdzenie Stewarta

$$a^2 \cdot x + a^2 \cdot y = (x + y)(b^2 + xy)$$

$$a^2 = b^2 + xy$$

$$[(\sqrt{3} + 1)m]^2 = b^2 + (\sqrt{3} - 1)m \cdot 2m$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ADC$  i otrzymujemy:

$$y^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$(2m)^2 = (\sqrt{6}m)^2 + [(\sqrt{3} + 1)m]^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos \alpha$$

$$4m^2 = 6m^2 + (4 + 2\sqrt{3})m^2 - 2(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot m^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(6 + 2\sqrt{3})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$$

Zatem  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  i  $\alpha = 45^\circ$ .

### Sposób VI (analitycznie)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a$  – długość boku trójkąta  $ABC$ ,

$\alpha$  – miara kąta  $DAC$ ,

$\beta$  – miara kąta  $BAD$ .

Umieszczamy trójkąt  $ABC$  w układzie współrzędnych tak, żeby  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$  i  $C$  leżał w I ćwiartce układu współrzędnych. Wtedy  $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ .

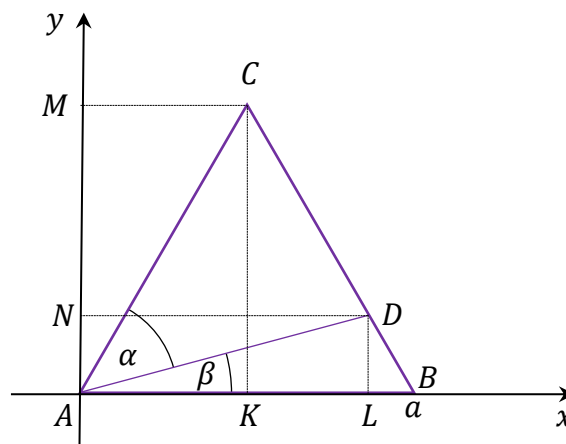
Trójkąty  $ABD$  i  $ACD$  mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka  $A$ , więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Oznaczmy teraz rzuty prostokątne punktów  $C$  i  $D$  na oś odciętych przez – odpowiednio –  $K$  oraz  $L$ , a rzuty prostokątne punktów  $C$  i  $D$  na oś rzędnych przez – odpowiednio –  $M$  oraz  $N$  (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|KL|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{2 + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} - 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

zatem

$$|KL| = (\sqrt{3} - 1) \cdot |KB| = (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2} \quad \text{oraz} \quad |AN| = (2 - \sqrt{3}) \cdot |AM| = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$D = \left( \frac{a}{2} + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{a}{2}, (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2} \right)$$

Współczynnik kierunkowy prostej  $AD$  jest równy

$$a_{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = a_{AD} = 2 - \sqrt{3}$$

Ze wzoru na tangens różnicy kątów otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(60^\circ - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 2} = 1$$

Zatem  $\alpha = 45^\circ$ .

#### Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].

#### Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{9}{25}$  (lub  $\frac{54}{150}$ ).

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń  $B$  oraz  $A \cap B$ , np.  $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$  oraz

$$|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}.$$

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia  $B$ , np.  $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5$ ,

ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia  $A \cap B$ , np.  $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga.**

Jeżeli zdający, obliczając  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  (lub  $\frac{|A \cap B|}{|B|}$ ), pominie w liczniku i mianowniku czynnik  $\binom{4}{2}$  bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Niech  $\Omega$  oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Oznaczmy przez  $A$  zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, natomiast przez  $B$  – że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

Obliczamy moc zdarzenia  $B$ :  $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$ .

Obliczamy moc zdarzenia  $A \cap B$ :  $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2} = 54$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe  $P(A|B)$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$$

**Zadanie 5. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 2)$  i  $[2, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych przedziałów - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami,  
**ALBO**

– zapisanie czterech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- zapisanie, że przypadek  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$  jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:  $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$  i  $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$ , a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(x + 3 > \frac{1}{2}x \text{ lub } x + 3 < -\frac{1}{2}x) \text{ i } (x + 3 > \frac{4-x}{2} \text{ lub } x + 3 < -\frac{4-x}{2}),$$

ALBO

- odczytanie z wykresów funkcji  $f$  oraz  $g$  pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia:  $x = -\frac{2}{3}$  oraz  $x = -10$  i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

- 2 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 2)$  i  $[2, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) oraz zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

- zapisanie czterech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,

ALBO

- zapisanie trzech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$  jest sprzeczny,

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:  $x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3|$  i  $x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$ ,

ALBO

- narysowanie wykresów funkcji  $f(x) = |x - 2|$  oraz  $g(x) = 2 \cdot |x + 3| - 2$ .

- 1 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 2)$  i  $[2, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

- zapisanie jednego z przedziałów:  $(-\infty, -3)$ ,  $[-3, 2)$ ,  $[2, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale - tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,

ALBO

- zapisanie czterech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,  
ALBO
  - zapisanie jednego z trzech przypadków:  $x + 3 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 3 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku - tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru  $\mathbb{R}$ ), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań  $(-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ , ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji  $f$  i  $g$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 2)$  i  $[2, +\infty)$ .

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy  $x \in (-\infty, -3)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $-x + 2 + 2(x + 3) < -2$ , czyli  $x < -10$ .

Stąd otrzymujemy  $x \in (-\infty, -10)$ .

Przypadek 2. (gdy  $x \in [-3, 2)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $-x + 2 - 2(x + 3) < -2$ , czyli  $x > -\frac{2}{3}$ .

Stąd otrzymujemy  $x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ .

Przypadek 3. (gdy  $x \in [2, +\infty)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $x - 2 - 2(x + 3) < -2$ , czyli  $x > -6$ .

Stąd otrzymujemy  $x \in [2, +\infty)$ .

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności  $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$  są wszystkie liczby ze zbioru  $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ .

### Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwe są równoważności:

$$(1) |x| < a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x < a \text{ i } x > -a$$

oraz

$$(2) |x| > a \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > a \text{ lub } x < -a.$$

Przekształcamy nierówność  $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$ , korzystając z równoważności (1):

$$x - 2 < -2 + 2 \cdot |x + 3| \quad \text{i} \quad x - 2 > -(-2 + 2 \cdot |x + 3|)$$

$$|x + 3| > \frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad |x + 3| > \frac{4 - x}{2}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$\left(x + 3 > \frac{1}{2}x \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{1}{2}x\right) \quad \text{i} \quad \left(x + 3 > \frac{4 - x}{2} \quad \text{lub} \quad x + 3 < -\frac{4 - x}{2}\right)$$

$$(x > -6 \quad \text{lub} \quad x < -2) \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \left(x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10\right)$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x < -10$$

Rozwiązaniami nierówności  $|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$  są wszystkie liczby ze zbioru  $(-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ .

### Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{27}{2}$  lub 27.

- 3 pkt – obliczenie  $a_1$  oraz  $q$ :  $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$ ,  $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $(a_1, q) = (2, 3)$ ,  
 $(a_1, q) = (2, -3)$   
 ALBO
- obliczenie  $a_3$  oraz  $q$ :  $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$ ,  $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $(a_3, q) = (18, 3)$ ,  
 $(a_3, q) = (18, -3)$ ,  
 ALBO
- obliczenie  $a_2$  oraz  $q$ :  $(a_2, q) = (-6, -3)$ ,  $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$ ,  
 $(a_2, q) = (6, 3)$  (dla *sposobu III*),  
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par  $(a_1, q)$ , dla której szereg geometryczny jest zbieżny  
 i obliczenie sumy tego szeregu, np.  $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$  i  $S = 27$ ,  $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$   
 i  $S = \frac{27}{2}$ ,  
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par  $(a_3, q)$ , dla której szereg geometryczny jest zbieżny  
 i obliczenie sumy tego szeregu, np.  $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$  i  $S = 27$ ,  $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$   
 i  $S = \frac{27}{2}$ ,  
 ALBO
- wyznaczenie jednej z par  $(a_2, q)$ , dla której szereg geometryczny jest zbieżny  
 i obliczenie sumy tego szeregu, np.  $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$  i  $S = 27$ ,  $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$   
 i  $S = \frac{27}{2}$  (dla *sposobu III*).
- 2 pkt – obliczenie  $a_1$ :  $a_1 = 2$  oraz  $a_1 = 18$   
 ALBO
- obliczenie  $a_3$ :  $a_3 = 18$  oraz  $a_3 = 2$ ,  
 ALBO
- obliczenie  $q^2$ :  $q^2 = 9$  oraz  $q^2 = \frac{1}{9}$ ,  
 ALBO
- zapisanie alternatywy równań  $-\frac{6}{q} - 6q = 20$  lub  $\frac{6}{q} + 6q = 20$  (dla *sposobu III*),  
 ALBO
- zapisanie równania  $\frac{36}{q^2} + 36q^2 = 328$  (dla *sposobu III*).
- 1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą ( $a_1$  lub  $a_3$ , lub  $q$ ), np.  
 $a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$ ,  $(20 - a_3)^2 + a_3^2 = 328$ ,  $\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$   
 ALBO
- zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a_2$ , np.  $a_2^2 = 36$ ,  $20^2 - 2a_2^2 = 328$  (dla *sposobu III*).
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

- Jeżeli zdający odrzuci otrzymane wartości  $q = 3$  oraz  $q = -3$  (lub parę  $(a_1, a_3) = (2, 18)$ ) bez komentarza, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający nie odrzuci wartości  $q = 3$  oraz  $q = -3$  i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla  $q = 3$  (albo dla  $q = -3$ ), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- a)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek  $|q| < 1$  oraz co najmniej jeden iloraz spełniający warunek  $|q| \geq 1$  i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (2 punkty za pary  $(a_1, q)$  oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów  $q$  spełniających warunek  $|q| < 1$ , o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek  $|q| \geq 1$ ).
- b)** Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej dwa ilorazy i wszystkie z nich spełniają warunek  $|q| < 1$  oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary  $(a_1, q)$  oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów  $q$ ), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek  $|q| < 1$  i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary  $(a_1, q)$  oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów  $q$  spełniających warunek  $|q| < 1$ , o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek  $|q| \geq 1$ ), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań  $a_1 + a_3 = 20$  i  $a_1^2 + a_3^2 = 328$ :  
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$  oraz obliczy poprawnie obie sumy szeregu:  $S = 27$  i  $S = \frac{27}{2}$  i nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek  $|q| \geq 1$ , to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań  $a_1 + a_3 = 20$  i  $a_1^2 + a_3^2 = 328$ :  
 $(a_1, a_3) = (18, 2)$  oraz  $(a_1, a_3) = (2, 18)$ , ale nie obliczy poprawnie obu sum szeregu:  $S = 27$  i  $S = \frac{27}{2}$  lub obliczy sumę szeregu dla ilorazu spełniającego warunek  $|q| \geq 1$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu  $(a_n)$ . Z warunków  $a_1 + a_3 = 20$  i  $a_1^2 + a_3^2 = 328$  otrzymujemy:

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 18$$

Gdy  $a_1 = 2$ , to  $a_3 = 20 - a_1 = 18$  i wtedy  $q^2 = 9$ , więc  $q = -3$  lub  $q = 3$ . Dla każdej z tych wartości ilorazu ciągu  $(a_n)$  jest rozbieżny i tym samym nie są spełnione warunki zadania.

Gdy  $a_1 = 18$ , to  $a_3 = 20 - a_1 = 2$  i wtedy  $q^2 = \frac{1}{9}$ , więc  $q = -\frac{1}{3}$  lub  $q = \frac{1}{3}$ . Dla każdej z tych wartości  $q$  ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, a ponieważ  $|\frac{1}{3}| < 1$  oraz  $|\frac{1}{3}| < 1$ , więc dla obu tych wartości ilorazu istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego  $(a_n)$ . Dla  $a_1 = 18$  i  $q = -\frac{1}{3}$  suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{27}{2}$$

Dla  $a_1 = 18$  i  $q = \frac{1}{3}$  suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

### Sposób II

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu  $(a_n)$ . Z warunku  $a_1 + a_3 = 20$  otrzymujemy

$$a_1 + a_1 q^2 = 20, \text{ więc } a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} \text{ i } a_1 \neq 0.$$

Stąd i z warunku  $a_1^2 + a_3^2 = 328$  otrzymujemy:

$$a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$$

$$a_1^2 \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$\frac{400}{(q^2 + 1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6400$$

$$q^2 = \frac{82 - 80}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9} \quad \vee \quad q^2 = \frac{82 + 80}{2 \cdot 9} = 9$$

$$q = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = -3 \quad \vee \quad q = 3$$

Ponieważ  $a_1 \neq 0$ , więc dla  $q = -3$  oraz  $q = 3$  ciąg  $(a_n)$  nie jest zbieżny.

Gdy  $q = -\frac{1}{3}$ , to  $a_1 = \frac{20}{q^2 + 1} = 18$  i ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Ponadto  $|\frac{1}{3}| < 1$ , więc istnieje suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy  $q = \frac{1}{3}$ , to  $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$  i ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Ponadto  $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ , więc istnieje suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

### Sposób III (poprzez $a_2$ )

Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu  $(a_n)$ . Z warunków  $a_1 + a_3 = 20$  i  $a_1^2 + a_3^2 = 328$  otrzymujemy:

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$(a_1 + a_3)^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

$$20^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

Stąd, po zastosowaniu własności ciągu geometrycznego, dostajemy

$$20^2 - 2a_2^2 = 328$$

$$a_2 = -6 \vee a_2 = 6$$

Przypadek 1. (gdy  $a_2 = -6$ ).

Warunek  $a_1 + a_3 = 20$  zapisujemy w postaci  $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$  i obliczamy iloraz ciągu:

$$-\frac{6}{q} - 6q = 20$$

$$-6q^2 - 20q - 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{-12} = -\frac{1}{3} \vee q = \frac{20 + 16}{-12} = -3$$

Gdy  $q = -\frac{1}{3}$  i  $a_2 = -6$ , to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Ponadto  $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ , więc istnieje suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1-q} = \frac{18}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy  $q = -3$  i  $a_2 = -6$ , to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Przypadek 2. (gdy  $a_2 = 6$ ).

Warunek  $a_1 + a_3 = 20$  zapisujemy w postaci  $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$  i obliczamy iloraz ciągu:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$q = \frac{20 - 16}{12} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20 + 16}{12} = 3$$

Gdy  $q = \frac{1}{3}$  i  $a_2 = 6$ , to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Ponadto  $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ , więc istnieje suma  $S$  wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

Gdy  $q = 3$  i  $a_2 = 6$ , to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

#### Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

#### Zasady oceniania (dla *sposobów I* oraz *II*)

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – zapisanie związku między długościami podstaw trapezu, np.  $\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + b\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right)} = \frac{1}{2}$ .

2 pkt – zapisanie równań  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}$  oraz  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{1}{2}$  oraz  $d = \frac{a+b}{2}$

ALBO

– spełnienie dwóch spośród czterech poniższych warunków:

1) zapisanie równań  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}$  albo  $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$ ,

2) zapisanie równań  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h}$  albo  $\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{1}{3}$ ,

3) zapisanie równań  $\frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h}$  albo  $\frac{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{2}{3}$ ,

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$4) \text{ zapisanie równania } \frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot (b + d) \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h.$$

1 pkt – spełnienie jednego spośród czterech poniższych warunków:

$$1) \text{ zapisanie równań } \frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}} \text{ albo } \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$2) \text{ zapisanie równań } \frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} \text{ albo } \frac{\frac{1}{2} \cdot (d + b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} = \frac{1}{3},$$

$$3) \text{ zapisanie równań } \frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} \text{ albo } \frac{\frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h} = \frac{2}{3},$$

$$4) \text{ zapisanie równania } \frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot (b + d) \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h,$$

ALBO

$$- \text{ zapisanie równania } d = \frac{a + b}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

- Jeżeli w rozwiązaniu zdający błędnie zakłada, że trapezy  $ABFE$  i  $EFCD$  są podobne i na tym opiera rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za zapisanie związku między długościami podstaw trapezu i odcinka łączącego środki jego ramion.
- Jeżeli zdający rozpatruje trapez o konkretnych wymiarach i na tym opiera całe rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

- Jeżeli zdający zapisze jednocześnie  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + b\right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right)}$  oraz  $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{1}{2}$ , to może otrzymać **3 punkty**.

**Zasady oceniania (dla sposobu II)**

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – wyznaczenie stosunku pól trójkątów  $AKE$  i  $KFC$ : 1 : 5.2 pkt – zapisanie pól trapezów  $EFCD$  i  $ABFE$  w zależności od pól trójkątów  $AKE$  i  $KFC$ .1 pkt – zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych  $ACD$  i  $AKE$  oraz zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych  $ABC$  i  $KFC$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania****Sposób I**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

 $a, b$  – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu, $d$  – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu, $h$  – wysokość trapezu.

Z własności trapezu otrzymujemy  $d = \frac{a+b}{2}$ . Trapezy  $EFCD$  i  $ABFE$  mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu  $EFCD$  do pola trapezu  $ABFE$  jest równy  $\frac{1}{2}$ , więc

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d + 2b = a$$

Stąd i z zależności  $d = \frac{a+b}{2}$  otrzymujemy

$$a + b + 4b = 2a$$

$$5b = a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

### Sposób Ia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a, b$  – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

$d$  – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu,

$h$  – wysokość trapezu.

Trapezy  $EFCD$  i  $ABFE$  mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu  $EFCD$  do pola trapezu  $ABFE$  jest równy  $\frac{1}{2}$ , więc

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+d) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d = a - 2b$$

Ponadto stosunek pola trapezu  $EFCD$  do pola trapezu  $ABCD$  jest równy  $\frac{1}{3}$ , więc

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (d+b) \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{d+b}{2(a+b)} = \frac{1}{3}$$

$$3d + 3b = 2a + 2b$$

$$3d = 2a - b$$

Stąd i zależności  $d = a - 2b$  otrzymujemy

$$3(a - 2b) = 2a - b$$

$$a = 5b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

### Sposób II (przez pola trójkątów podobnych)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a, b$  – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

$K$  – punkt przecięcia przekątnej  $AC$  z odcinkiem  $EF$ ,

$n, m$  – pole – odpowiednio – trójkąta  $AKE$  i  $KFC$ .

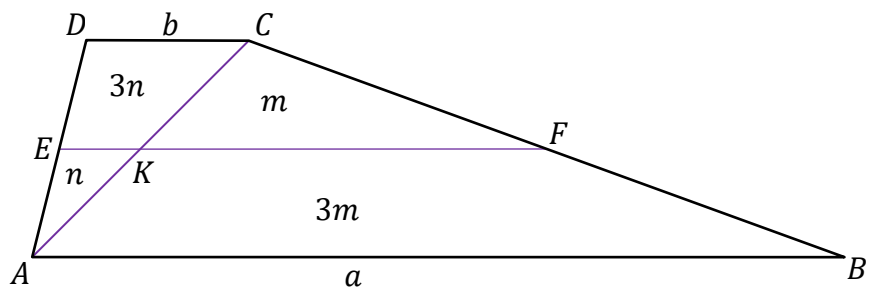
Trójkąty  $ACD$  i  $AKE$  oraz trójkąty  $ABC$  i  $KFC$  są podobne (cecha kkk), a skala każdego z tych podobieństw jest równa 2, gdyż  $E$  i  $F$  to środki boków  $AD$  oraz  $BC$ . Zatem

$$P_{ACD} = 2^2 \cdot P_{AKE} = 4n \text{ oraz } P_{ABC} = 2^2 \cdot P_{KFC} = 4m$$

Stąd

$$P_{EKCD} = 3n \text{ oraz } P_{ABFK} = 3m$$

(zobacz rysunek).



Zatem

$$P_{EFCD} = 3n + m \text{ oraz } P_{ABFE} = n + 3m$$

Trójkąty  $ACD$  i  $ABC$  mają wspólną wysokość, więc

$$\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{b}{a} = \frac{4n}{4m} = \frac{n}{m}$$

Z warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{3n + m}{n + 3m} = \frac{1}{2}$$

Stąd

$$6n + 2m = n + 3m$$

$$5n = m$$

Zatem

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = \frac{n}{5n} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

### Zadanie 8. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów; IX.R3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

### Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ ,  $B = (-1, -2)$

oraz  $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ .

4 pkt – zapisanie równania  $\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala obliczyć

współrzędne punktu  $M$ , np.  $\sqrt{(-1 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2} = \sqrt{2}$  oraz

$\sqrt{(x_M - 3,2)^2 + (y_M + 2,6)^2} = 2\sqrt{2}$ ,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów  $A$  oraz  $B$ :  $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$  i  $B = (-1, -2)$

oraz zapisanie równości  $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$  oraz  $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$ .

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  oraz  $B$ :  $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$  oraz

$$B = (-1, -2)$$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \text{ oraz zapisanie równości } x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B \text{ oraz}$$

$$y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B.$$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np.

$$(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45,$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej  $AB$ , np.  $2x + 14y = -30$  oraz zapisanie równości

$$x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B \text{ oraz } y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B,$$

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu  $B$ :  $B = (-1, -2)$  i sprawdzenie rachunkiem, że punkt  $B$  jest punktem przecięcia okręgów oraz wyznaczenie równania prostej  $AB$ ,  
ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu  $B$ :  $B = (-1, -2)$  i sprawdzenie rachunkiem, że punkt  $B$  jest punktem przecięcia okręgów oraz obliczenie współrzędnych środka odcinka  $AB$ :  $\left(\frac{11}{10}, -\frac{23}{10}\right)$ .

1 pkt – wyznaczenie równania prostej  $AB$ , np.  $2x + 14y = -30$

ALBO

– zapisanie równości  $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$  oraz  $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$ ,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu  $B$ :  $B = (-1, -2)$  i sprawdzenie rachunkiem, że punkt  $B$  jest punktem przecięcia okręgów oraz zapisanie/obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez środki okręgów: 7.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie identyfikuje punkt  $A$  jako  $(-1, -2)$ , to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty  $A$  oraz  $B$ , których pierwsze współrzędne są liczbami dodatnimi, i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiązuje zadanie do końca, rozważając dwa przypadki, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty  $A$  oraz  $B$ , których pierwsze współrzędne są liczbami ujemnymi, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (trzeci punkt otrzymuje za zapisanie równości  $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$  oraz  $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$ ).

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy współrzędne punktów  $A$  oraz  $B$ , w których przecinają się okręgi  $O_1$  oraz  $O_2$ :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 - (x-2)^2 - (y-4)^2 = 5 - 45 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - x^2 + 4x - 4 - y^2 + 8y - 16 = -40 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 14y = -30 \quad /:2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = -15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ (-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y - 15 \\ 50y^2 + 230y + 260 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$y = -\frac{13}{5} \quad \text{lub} \quad y = -2$$

Gdy  $y = -\frac{13}{5}$  to wtedy  $x = -7 \cdot \left(-\frac{13}{5}\right) - 15 = \frac{16}{5}$ .

Gdy  $y = -2$  to wtedy  $x = -7 \cdot (-2) - 15 = -1$ .

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu  $A$  jest dodatnia, więc  $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

oraz  $B = (-1, -2)$ .

Oznaczmy przez  $x_M$  i  $y_M$  odpowiednie współrzędne punktu  $M$ , tj.  $M = (x_M, y_M)$ . Wtedy

$$\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$$

$$\left[ x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right) \right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$$

$$\left[ x_M - \frac{16}{5}, y_M + \frac{13}{5} \right] = [-2x_M - 2, -2y_M - 4]$$

$$x_M - \frac{16}{5} = -2x_M - 2 \quad \wedge \quad y_M + \frac{13}{5} = -2y_M - 4$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$x_M = \frac{2}{5} \wedge y_M = -\frac{11}{5}$$

Zatem  $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ .

**Zadanie 9. (0–5)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

**Zasady oceniania (dla sposobów I–III)**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ .

4 pkt – zapisanie założenia  $\cos x \neq 0$  oraz rozwiązanie alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ :  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$  (dla sposobów I oraz III)  
ALBO

– rozwiązanie jednego z równań alternatywy  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , gdzie  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$  i  $k \in \mathbb{Z}$ , w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , np.

$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$  i  $\frac{\pi}{3}$  (rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ ),

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$  (rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ ),

**oraz** uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania  $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$  (dla sposobów I oraz III),  
ALBO

– rozwiązanie alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$  oraz  $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$  (dla sposobów I oraz III),  
ALBO

– zapisanie założenia  $\cos(2x) \neq 0$  oraz rozwiązanie równania  $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ :  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$  (dla sposobu II),  
ALBO

– rozwiązanie równania  $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
**oraz** uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania  $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$  (dla sposobu II).

3 pkt – zapisanie założenia  $\cos x \neq 0$  oraz rozwiązanie alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub

$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$  oraz  $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , np.

$(-\frac{2\pi}{3})$  i  $\frac{\pi}{3}$  (rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ ),

$(-\frac{\pi}{6})$  i  $\frac{5\pi}{6}$  (rozwiązania równania  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ ),

(dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**oraz** uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$  (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– zapisanie założenia  $\cos(2x) \neq 0$  oraz rozwiązanie równania  $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$

w zbiorze  $\mathbb{R}$ :  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  (dla *sposobu II*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci  $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$  **oraz** uzasadnienie, że liczby

postaci  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania  $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

(dla *sposobu II*).

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  (dla

*sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci  $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$  **oraz**

uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$  (dla *sposobu I*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci  $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$  (dla *sposobu II*).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci  $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$  (dla *sposobu I*)

ALBO

– zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania

$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$  (dla *sposobu II*),

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci

$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$  (dla *sposobu III*),

ALBO

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

– uzasadnienie, że liczby postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie spełniają równania

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad (\text{dla sposobów I oraz III}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Zasady oceniania (dla sposobów IV–V)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ .

4 pkt – rozwiązanie równania  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$   
(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie równania  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :  $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

(dla sposobu IV),

ALBO

– rozwiązanie obydwu równań alternatywy  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  lub  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$

w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{oraz} \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{dla sposobu V}),$$

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  lub

$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  lub

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale  $[-\pi, \pi]$ , np.

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ i } \frac{\pi}{3} \quad (\text{rozwiązania równania } \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6} \quad (\text{rozwiązania równania } \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0 \text{ w przedziale } [-\pi, \pi]),$$

(dla sposobu V).

3 pkt – przekształcenie równania do postaci  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$  (dla sposobu IV)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$  (dla sposobu IV),

ALBO

- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  lub  $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze  $\mathbb{R}$ , np.
  - $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ ),
  - $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ ),
  - gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  (dla *sposobu V*),
- przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  lub  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze  $\mathbb{R}$ , np.
  - $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ ),
  - $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ ), gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  (dla *sposobu V*).
- 2 pkt – przekształcenie równania do postaci  $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$  (dla *sposobu IV*)
  - ALBO
  - przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  lub  $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  (dla *sposobu V*),
  - ALBO
  - przekształcenie równania do postaci alternatywy równań  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  lub  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$  (dla *sposobu V*).
- 1 pkt – zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania  $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$  (dla *sposobu IV*)
  - ALBO
  - zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci  $(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$  (dla *sposobu V*),
  - ALBO
  - zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta i obliczenie wyróżnika  $\Delta$  trójkątnu kwadratowego  $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x$  zmiennej np.  $\cos x$ :
 
$$\Delta = (4\sqrt{3}\sin x)^2.$$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) niepoprawne zastosowanie wzoru na sumę/różnicę cosinusów/sinusów,
- b) niepoprawne zastosowanie wzoru na iloczyn cosinusów/sinusów,
- c) błędne zastosowanie nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej,

ale zdający otrzyma elementarne równania trygonometryczne postaci  $\sin(ax + b) = c$ ,  $\cos(ax + b) = c$ , gdzie  $a \neq 0$ ,  $a^2 \neq 1$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \in [-1, 1]$ , i rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

2. Jeżeli zdający błędnie stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania  $3 \cos(2x) = -\sqrt{3} \sin(2x)$  do kwadratu i nie sprawdza rachunkiem, czy wszystkie otrzymane liczby są rozwiązaniami, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; natomiast jeżeli odrzuci co najmniej jedno rozwiązanie „obce” (ale nie odrzuci wszystkich rozwiązań „obcych”), to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie  $a(x)$  zawierające niewiadomą  $x$  i nie zapisze założenia  $a(x) \neq 0$ , ani też nie rozważy przypadku  $a(x) = 0$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I (poprzez sinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$  do postaci

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Dzielimy obie strony równania  $3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$  przez  $\cos^2 x$  i otrzymujemy

$$3 + \frac{2\sqrt{3} \sin x}{\cos x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$-3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = 48$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$  są wszystkie liczby postaci  $\frac{\pi}{3} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby  $(-\frac{2\pi}{3})$  i  $\frac{\pi}{3}$ .

Rozwiązaniami równania  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$  są wszystkie liczby postaci  $-\frac{\pi}{6} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby  $(-\frac{\pi}{6})$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

Przypadek 2. (gdy  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ponieważ  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$  dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  oraz  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$  dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ , więc równanie  $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$  przyjmuje postać

$$3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

czyli  $-3 = 0$ . To oznacza, że wśród liczb postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie ma rozwiązań równania  $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ .

Ostatecznie rozwiązaniami równania  $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

### Sposób II (poprzez cosinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie

$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  do postaci

$$3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy  $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Dzielimy obie strony równania  $3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$  przez  $\cos(2x)$  i otrzymujemy

$$3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania w przedziale  $[-\pi, \pi]$ :  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

Przypadek 2. (gdy  $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ponieważ  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$  dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ , więc równanie

$3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$  przyjmuje postać

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

i stąd  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli  $0 = 1$ . To oznacza, że wśród liczb postaci  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie ma rozwiązań równania  $3 \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$ .

Ostatecznie rozwiązaniami równania  $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

### Sposób III

Przekształcamy równanie  $3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$  równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \sin^2 x = 0$$

$$3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 \sin x) = 0$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \quad \vee \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$$

Przypadek 1. (gdy  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Dzielimy strony równań alternatywy przez  $\cos x$  i otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$  są wszystkie liczby postaci  $\frac{\pi}{3} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$  i  $\frac{\pi}{3}$ .

Rozwiązaniami równania  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w zbiorze  $\mathbb{R}$  są wszystkie liczby postaci  $-\frac{\pi}{6} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Zatem rozwiązaniami alternatywy równań  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  lub  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

Przypadek 2. (gdy  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ponieważ  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ , więc równania alternatywy  $\sin x = \sqrt{3} \cos x$  lub

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$  przyjmują postać

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sqrt{3} \cdot 0 \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0$$

i stąd  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli  $0 = 1$ . To oznacza, że wśród liczb postaci  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , nie ma rozwiązań

równania  $\sin x = \sqrt{3} \cos x$  i nie ma rozwiązań równania  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x$ .

Ostatecznie rozwiązaniami równania  $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

#### Sposób IV (poprzez cosinus podwojonego kąta i sinus sumy)

Przekształcamy równanie  $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  równoważnie, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta i sinus sumy kątów:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązaniami równania  $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

### Sposób V

Przekształcamy równanie  $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$  równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 4\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad /: 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Stąd rozwiązaniami równania  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \text{ oraz } \frac{\pi}{3}.$$

Rozwiązujemy równanie  $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Stąd rozwiązaniami równania  $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:

$$\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ oraz } \frac{5\pi}{6}.$$

Ostatecznie rozwiązaniami równania  $3\cos^2x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2x = 0$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$  są liczby:  $(-\frac{2\pi}{3})$ ,  $(-\frac{\pi}{6})$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{5\pi}{6}$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w [...] ostrosłupach kąty między odcinkami [...] oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów; X.5) oblicza [...] pola powierzchni [...] ostrosłupów [...].

### Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 918.

4 pkt – obliczenie długości krawędzi  $SC$  i  $BE$ :  $|SC| = 34$  i  $|BE| = 15$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $SC$  i  $BS$ :  $|SC| = 34$  i  $|BS| = 5\sqrt{34}$ ,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $BS$ :  $|BS| = 5\sqrt{34}$  i zapisanie, że trójkąt  $SBC$  jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt  $SBC$  jako prostokątny),

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $AS$  i  $SB$ :  $|AS| = 4\sqrt{34}$  i  $|SB| = 5\sqrt{34}$ ,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $AS$  i  $SC$ :  $|AS| = 4\sqrt{34}$  i  $|SC| = 34$ ,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $AS$  i  $BE$ :  $|AS| = 4\sqrt{34}$  i  $|BE| = 15$ ,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi  $AS$ :  $|AS| = 4\sqrt{34}$  i zapisanie, że trójkąt  $SBC$  jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt  $SBC$  jako prostokątny).

3 pkt – obliczenie długości odcinka  $CE$ :  $|CE| = 9$  **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednego z odcinków:  $SC$ ,  $SB$ ,  $SA$ ,  $SE$ , np.:

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|SC|} \quad (|SC| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } BCS \text{ i } ECB),$$

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|SB|} \quad (|SB| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

$$\frac{|CE|}{|OE|} = \frac{|AC|}{|SA|} \quad (|SA| \text{ z podobieństwa trójkątów } ECO \text{ i } ACS),$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$|SE| \cdot |CE| = |BE|^2 \quad (|SE| \text{ z podobieństwa trójkątów } ESB \text{ i } EBC),$$

ALBO

- zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedną z niewiadomych jest długość krawędzi  $BS$ , a drugą długość krawędzi  $SC$ , np.

$$|BS|^2 + (3\sqrt{34})^2 = |SC|^2 \quad \text{i} \quad \frac{15}{3\sqrt{34}} = \frac{|BS|}{|SC|},$$

ALBO

- zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością krawędzi  $BS$  albo długością krawędzi  $SC$ , albo długością krawędzi  $AS$ ), np.  $\left(\frac{15}{|BS|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$ ,

$$\left(\frac{3\sqrt{34}}{|SC|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{|AS|}\right)^2 = 1.$$

2 pkt – obliczenie długości  $x$  odcinka  $BE$  (lub  $DE$ ):  $x = 15$ 

ALBO

- obliczenie długości  $y$  odcinka  $EO$ :  $y = 6\sqrt{2}$ ,

ALBO

- spełnienie warunku 2) i jednego z warunków 3),4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych warunków 1)-4):

- 1) obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta  $\frac{\beta}{2} = |\sphericalangle BEO|$  (gdzie  $O$  jest

punktem przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ ), np.:  $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{34}}{4}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

- 2) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $BED$  i zapisanie równania  $(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$ ;

- 3) zdający zapisze, że trójkąt  $SBC$  (lub  $SDC$ ) jest prostokątny i wskaże właściwy wierzchołek kąta prostego lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa:  $|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$ ,

– zapisze, że trójkąty  $CBS$  oraz  $CEB$  są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów  $CBS$  oraz  $CEB$ , np.:

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|},$$

– zapisze, że trójkąty  $BES$  oraz  $CEB$  są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów  $BES$  oraz  $CEB$ , np.:

$$\frac{|ES|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|EC|};$$

- 4) zapisze, że trójkąt  $OEC$  jest prostokątny lub wynika to z rozwiązania, np.:

– zdający zapisze równość  $|OC|^2 = |OE|^2 + |EC|^2$ ,

– zapisze, że trójkąty  $OEC$  oraz  $SAC$  są podobne,

– zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów  $OEC$  oraz  $SAC$ , np.:

$$\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

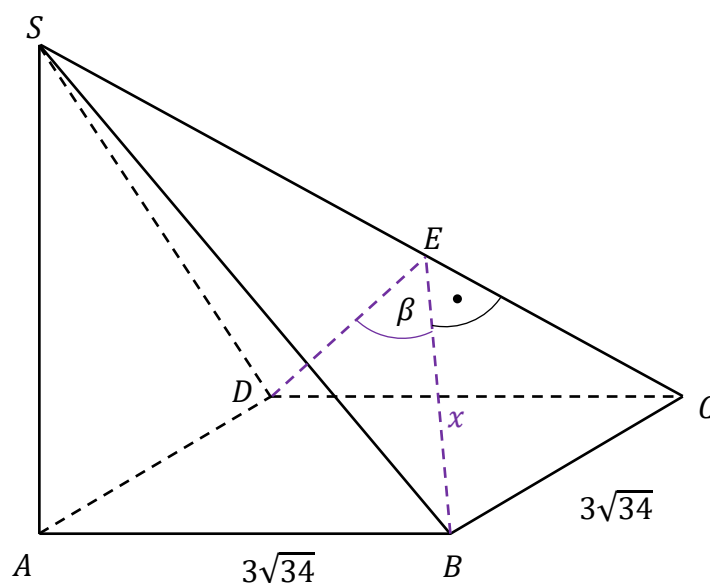
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** (za poprawną interpretację kąta między ścianami bocznymi oraz za zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BDE$ ).
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi  $BCS$  i  $CDS$ , np. zakłada, że jest to kąt  $BSD$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za spełnienie warunku 3) z kryterium za 1 punkt).
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje inną bryłę i nie jest nią ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I (poprzez  $BE$ ,  $CS$ ,  $AS$ )*

Niech  $E$  będzie spodkiem wysokości ściany bocznej  $BCS$  poprowadzonej z wierzchołka  $B$ . Oznaczmy  $x = |BE|$  (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne  $BCS$  i  $CDS$  są trójkątami przystającymi, więc  $|DE| = |BE| = x$ . Stosujemy do trójkąta  $BED$  twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$|BD|^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$$

$$x = 15$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $BEC$  i obliczamy długość odcinka  $CE$ :

$$|CE|^2 = |BC|^2 - |BE|^2$$

$$|CE|^2 = (3\sqrt{34})^2 - 15^2$$

$$|CE| = 9$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

Trójkąt  $BCS$  jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż  $AB \perp BC$  i odcinek  $AB$  jest rzutem prostokątnym odcinka  $SB$  na płaszczyznę  $ABCD$ .

Trójkąty  $BCS$  i  $ECB$  są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów), więc

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|}$$

$$\frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{|SC|}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $ACS$  i obliczamy długość odcinka  $AS$ :

$$|AS|^2 = |SC|^2 - |AC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

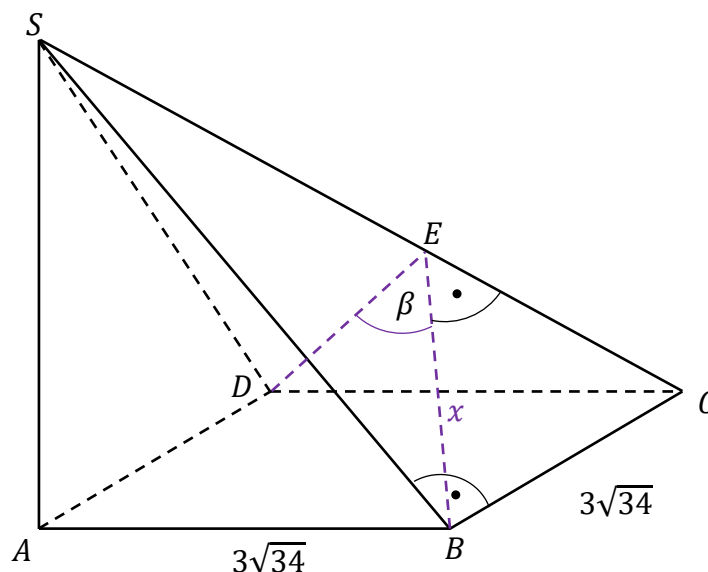
$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Obliczamy pole  $P_b$  powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot |SC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 15 \cdot 34 = 918$$

*Sposób 1a (poprzez  $BE$ ,  $CE$ ,  $BS$ ,  $AS$ )*

Niech  $E$  będzie spodkiem wysokości ściany bocznej  $BCS$  poprowadzonej z wierzchołka  $B$ . Oznaczmy  $x = |BE|$  (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne  $BCS$  i  $CDS$  są trójkątami przystającymi, więc  $|DE| = |BE| = x$ . Stosujemy do trójkąta  $BED$  twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta \\ (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $BEC$  i obliczamy długość odcinka  $CE$ :

$$\begin{aligned} |CE|^2 &= |BC|^2 - |BE|^2 \\ |CE|^2 &= (3\sqrt{34})^2 - 15^2 \\ |CE| &= 9 \end{aligned}$$

Trójkąt  $BCS$  jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż  $AB \perp BC$  i odcinek  $AB$  jest rzutem prostokątnym odcinka  $SB$  na płaszczyznę  $ABCD$ . Ponieważ kąt ostry przy wierzchołku  $C$  jest wspólnym kątem trójkątów prostokątnych  $BCE$  i  $BCS$ , więc są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{|BS|}{|BC|} &= \frac{|BE|}{|EC|} \\ \frac{|BS|}{3\sqrt{34}} &= \frac{15}{9} \\ |BS| &= 5\sqrt{34} \end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta  $ABS$  obliczamy długość odcinka  $AS$ :

$$\begin{aligned} |AS|^2 &= |BS|^2 - |AB|^2 \\ |AS|^2 &= (5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2 = (4\sqrt{34})^2 \\ |AS| &= 4\sqrt{34} \end{aligned}$$

Obliczamy pole  $P_b$  powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

### Sposób II (poprzez $EO$ , $SC$ , $AS$ , $BS$ )

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

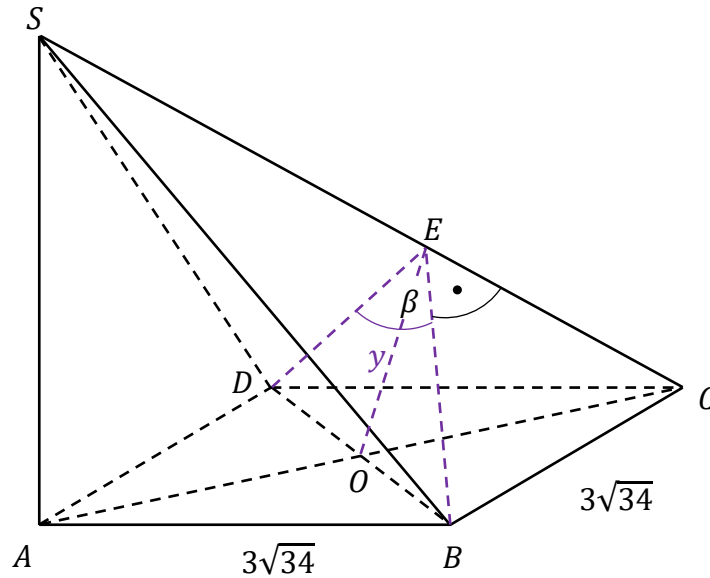
$E$  – spodek wysokości ściany bocznej  $BCS$  poprowadzonej z wierzchołka  $B$ ,

$O$  – punkt przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ ,

$y$  – długość odcinka  $EO$

(zobacz rysunek).

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.



Ponieważ ściany boczne  $BCS$  i  $CDS$  są trójkątami przystającymi, więc  $|DE| = |BE|$ .  
Obliczamy sinus i cosinus kąta ostrego  $BEO$ :

$$\cos \beta = -\frac{9}{25}$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \text{ oraz } 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \text{ oraz } \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Obliczamy tangens kąta ostrego  $BEO$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Obliczamy długość  $y$  odcinka  $EO$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{|BO|}{|EO|}$$

$$\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{y}$$

$$y = 6\sqrt{2}$$

Ponieważ kąty  $SCA$  i  $OCE$  mają równe miary, więc korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz definicji sinusa i cosinusa, otrzymujemy

$$\sin^2 |\sphericalangle OCE| + \cos^2 |\sphericalangle SCA| = 1$$

$$\left(\frac{y}{|OC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{17}}{|SC|}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $ACS$  i obliczamy długość krawędzi  $AS$ :

$$|AS|^2 + |AC|^2 = |SC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - (3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2})^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $ABS$  i obliczamy długość krawędzi  $BS$ :

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2$$

$$|BS|^2 = (4\sqrt{34})^2 + (3\sqrt{34})^2$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Obliczamy pole  $P_b$  powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

### Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

### Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwaga.

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których miejsca zerowe funkcji  $f$  są tego samego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności  $\frac{m+8}{2-m} > 0$ :  $m \in (-8, 2)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za trzeci etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180: m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right).$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  równoważnej warunkowi

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180, \text{ np.}$$

$$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

1 pkt – przekształcenie nierówności  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$   
ALBO

– przekształcenie nierówności  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$  do postaci  $\frac{\Delta}{a^2} \leq 180$  (lub

$$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq 180).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Czwarty etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają jednocześnie warunki:  $m \neq 2$  oraz  $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$  oraz  $m \in (-8, 2)$  oraz

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right):$$

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

- 1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają jednocześnie warunki  $m \neq 2$  oraz  $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$  oraz  $m \in (-8, 2)$  oraz  $m \in (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{13}{4}, +\infty)$ :  $m \in (-8, -3) \cup (1, \frac{3}{2}]$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

- Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku  $m \neq 2$ , to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że  $x_1 + x_2 = \pm \frac{m+8}{2-m}$  lub  $x_1 \cdot x_2 = \pm \frac{2(2m+1)}{2-m}$ , lub  $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$ , to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète’a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np.  $x_1 + x_2 > 0$ ), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).
- Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$  do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète’a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność postaci  $(x_1 + x_2)^2 + k \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$ , gdzie  $k \neq -4$ , to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète’a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wówczas, gdy  $2 - m \neq 0$  i wyróżnik  $\Delta$  trójmianu  $(2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$  jest dodatni. Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$[-2(2m + 1)]^2 - 4 \cdot (2 - m)(m + 8) > 0$$

$$16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 > 0$$

$$20m^2 + 40m - 60 > 0$$

$$20(m - 1)(m + 3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

Miejsca zerowe funkcji  $f$  mają ten sam znak tylko wtedy, gdy  $x_1 \cdot x_2 > 0$ . Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m+8}{2-m} > 0$$

$$(m+8)(2-m) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in (-8, 2)$$

Przekształcamy warunek  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą  $m$ :

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$$

$$\left[ \frac{-2(2m+1)}{2-m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4}{(m-2)^2} + 4 \cdot \frac{(m+8)(m-2)}{(m-2)^2} - \frac{180(m-2)^2}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 - 180m^2 + 720m - 720}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{-160m^2 + 760m - 780}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$\Delta_m = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$m = \frac{38 - 14}{16} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad m = \frac{38 + 14}{16} = \frac{13}{4}$$

$$8 \left( m - \frac{3}{2} \right) \left( m - \frac{13}{4} \right) \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in \left( -\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{13}{4}, +\infty \right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq 2$
- $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $m \in (-8, 2)$
- $m \in \left( -\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{13}{4}, +\infty \right)$ :

$$m \in (-8, -3) \cup \left( 1, \frac{3}{2} \right]$$

Funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe  $x_1$  oraz  $x_2$  tego samego znaku, które spełniają warunek  $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ , tylko wtedy, gdy  $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ .

### Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] stożka [...].

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka a wysokością stożka, np.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{h^2 + r^2}, \left(\frac{5}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 1, \frac{r}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 25}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych stożków. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A, B, C$  – wierzchołki trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka,

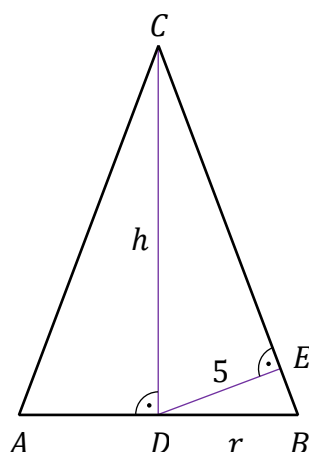
$D$  – środek podstawy stożka,

$E$  – spodek wysokości trójkąta  $DBC$  opuszczonej z wierzchołka  $D$  na bok  $BC$ ,

$r$  – promień podstawy stożka,

$h$  – wysokość stożka

(zobacz rysunek).



Zapisujemy pole trójkąta  $DBC$  na dwa sposoby i stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując:

$$\frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DE|$$

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 5$$

$$r^2h^2 = 25h^2 + 25r^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość  $V$  stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

To należało wykazać.

### Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

### Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $V$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $h = 5\sqrt{3}$  oraz

$$\text{obliczenie objętości stożka o takiej wysokości: } V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}.$$

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $V$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $h = 5\sqrt{3}$ .

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $V$  (lub funkcji  $\frac{3}{\pi} \cdot V$ ):  $h = 5\sqrt{3}$ .

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $V$  (lub funkcji  $\frac{3}{\pi} \cdot V$ ), np.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji  $25h^3$  oraz  $h^2 - 25$  i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci  $a \cdot \frac{75h^2(h^2-25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)}$  (gdzie  $a \neq 0$ )

lub  $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$ , gdzie  $B$  jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale  $(5, +\infty)$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji  $V$ ).

Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji  $25h^3$  lub  $h^2 - 25$  i dalej

popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci  $\frac{75h^2(h^2-25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)}$  lub  $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$ ,

gdzie  $B$  jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale  $(5, +\infty)$  ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji  $V$ ).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $h$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

**ORAZ:**

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $V$   
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $h$  funkcja  $V$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $h$  funkcja  $V$  ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{R}_+$ , to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym – termin główny 2025 r.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja  $V$  określona wzorem  $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2-25}$  dla  $h \in (5, +\infty)$  osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji  $V$ :  $V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2-25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2-25)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2}$

dla  $h \in (5, +\infty)$ .

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji  $V$ :

$$V'(h) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2} = 0$$

$$25h^2(h^2-75) = 0$$

$$h = 0 \notin (5, +\infty) \vee h = -5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \vee h = 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(h) < 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2-75)}{(h^2-25)^2} < 0 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h^2(h^2-75) < 0 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h^2 < 75 \wedge h \in (5, +\infty)$$

$$h \in (5, 5\sqrt{3})$$

więc  $V'(h) < 0$  dla  $h \in (5, 5\sqrt{3})$  oraz  $V'(h) > 0$  dla  $h \in (5\sqrt{3}, +\infty)$ .

Zatem funkcja  $V$  jest malejąca w przedziale  $(5, 5\sqrt{3}]$  i rosnąca w przedziale  $[5\sqrt{3}, +\infty)$ .

Stąd funkcja  $V$  osiąga wartość najmniejszą dla  $h = 5\sqrt{3}$ . Wtedy

$$V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25(5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$$

Uwaga.

Funkcja  $V$  jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto  $\lim_{h \rightarrow 5^+} V(h) = +\infty$  oraz

$\lim_{h \rightarrow +\infty} V(h) = +\infty$ , więc uwzględniając wartość funkcji  $V$  w punkcie stacjonarnym  $h = 5\sqrt{3}$

równą  $V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$ , można wyciągnąć wniosek, że funkcja  $V$  osiąga wartość

najmniejszą równą  $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$  dla argumentu  $h = 5\sqrt{3}$ .