CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

KOD | PESEL

*Miejsce na naklejkę.*
*Sprawdź, czy kod na naklejce to* **M-100**.
*Jeżeli tak – przyklej naklejkę.*
*Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.*

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
## POZIOM ROZSZERZONY

## ARKUSZ POKAZOWY

TERMIN: **4 marca 2022 r.**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

MMAP-R0-**100**-2203

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 32 strony (zadania 1–11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

**Zadanie 1. (0–3)**

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

**Wyraź $\log_4 49$ za pomocą liczb $a$ oraz $b$.**

**Zapisz obliczenia.**

## Zadanie 2. (0–3)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

**Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$.**

**Zapisz obliczenia.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>1.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td></tr>
</table>

**Zadanie 3. (0–4)**

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $(a_n)$, określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$ jest równa $7$, a suma $S$ wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $8$.

**Wyznacz wszystkie wartości $n$, dla których spełniona jest nierówność**

$$\left|\frac{S - S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$$

**gdzie $S_n$ oznacza sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$.**

**Zapisz obliczenia.**

**Zadanie 4. (0–5)**

Dane jest równanie

$$(x-6)\cdot[(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1]=0$$

z niewiadomą $x$ i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

**Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.**

**Zapisz obliczenia.**

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 3. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 4 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 4. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 5 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

**Zadanie 5. (0–3)**

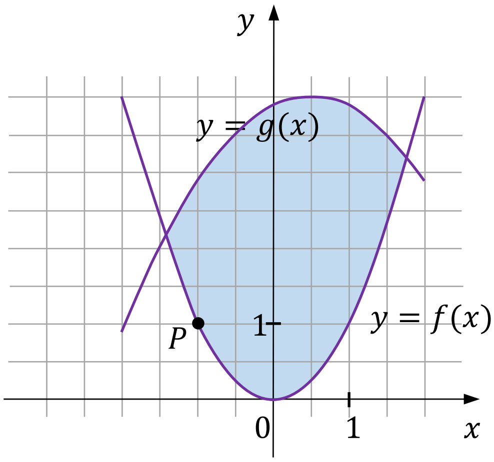
**Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez $4$ jest liczbą podzielną przez $36$.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>5.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

## Zadanie 6.

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ za pomocą fragmentów wykresów funkcji $f$ oraz $g$ (zobacz rysunek). Funkcje $f$ oraz $g$ są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$.


Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1, 1)$.




## Zadanie 6.1. (0–2)

Niech $R$ będzie punktem leżącym na wykresie funkcji $g$.

**Wykaż, że odległość punktu $R$ od punktu $P$ wyraża się wzorem**

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

**gdzie $x$ jest pierwszą współrzędną punktu $R$.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>6.1.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

## Zadanie 6.2. (0–6)

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

**Oblicz współrzędne punktu $K$, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca $K$ toru od początku $P$) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.**

**Zapisz obliczenia.**

*Wskazówka.*
*Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu $R$ leżącego na wykresie funkcji $g$ od punktu $P$ wyraża się wzorem*

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

*gdzie $x$ jest pierwszą współrzędną punktu $R$.*

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 6.2. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 6 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

**Zadanie 7. (0–4)**

**Rozwiąż równanie**

$$\sin(3x) = 2\sin x$$

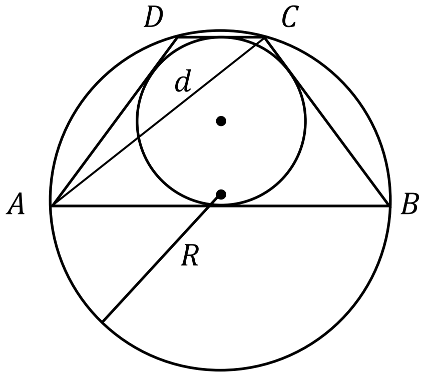
**w zbiorze $[0, \pi]$.**

**Zapisz obliczenia.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>7.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

## Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie $l$ i podstawach $AB$ oraz $CD$ takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna $AC$ trapezu ma długość $d$ (zobacz rysunek).




**Wykaż, że promień $R$ okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>8.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

**Zadanie 9. (0–6)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta $ABC$. Prosta $k$ o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta $ABC$ tego trójkąta. Okrąg $\mathcal{O}$ o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

**Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki $B$ i $C$ tego trójkąta z okręgiem $\mathcal{O}$.**

**Zapisz obliczenia.**

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 9. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 6 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

## Zadanie 10. (0–6)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym $P$. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka $S$ ma miarę $2\alpha$.

Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$ , gdzie $k$ jest stałym współczynnikiem liczbowym.

**Oblicz współczynnik $k$.**

**Zapisz obliczenia.**

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>10.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

**Zadanie 11. (0–4)**

Egzamin składa się z $15$ zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej $11$ zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.**

**Zapisz obliczenia.**

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 11. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 4 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

# **BRUDNOPIS** (nie podlega ocenie)