CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Arkusz pokazowy**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-660, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00
Data publikacji dokumentu:	18 marca 2022 r.

Uwagi:

1. *Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*.

2. *Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej* $(n-1)$ *punktów (gdzie* n *jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).*

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 3. (0-1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych. VIII.4) korzysta z własności kątów […].

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo E.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

BE

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $\lvert x+4\rvert = 5$, $\lvert x-2\rvert < 3$, $\lvert x+3\rvert \geq 4$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 9. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania
dla sposobów 1. i 2.
2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tzn.:

przekształcenie wyrażenia $(2k+1)^2+2023$ do postaci $4\cdot m(k)$ oraz uzasadnienie, że $m(k)$ jest liczbą parzystą

LUB

przekształcenie wyrażenia $(2k+1)^2+2023$ do postaci sumy składników, z których każdy jest liczbą podzielną przez 8 i uzasadnienie podzielności przez 8 każdego składnika

LUB

uzasadnienie podzielności przez 8 wyrażeń $(4k-1)^2+2023$ oraz $(4k+1)^2+2023$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$

LUB

zapisanie liczby n^2+2023 w postaci $n^2-1+8\cdot 253$ i uzasadnienie, że n^2-1 jest liczbą podzielną przez 8.

1 pkt – zapisanie liczby n w postaci $n=2k+1$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, i przekształcenie wyrażenia $(2k+1)^2+2023$ do $4k^2+4k+1+2023$ lub $(2k+1)^2-1+2024$

LUB
przeprowadzenie pełnego dowodu dla n postaci $4k - 1$ (lub $4k + 1$), gdzie $k \in \mathbb{Z}$
LUB
przeprowadzenie pełnego dowodu dla dwóch lub trzech przypadków spośród:
$n = 8k + 1$, $n = 8k + 3$, $n = 8k + 5$, $n = 8k + 7$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$)
LUB
zapisanie liczby $n^2 + 2023$ w postaci $n^2 - 1 + 8 \cdot 253$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający stosuje metodę indukcji i przeprowadzi dowód tylko dla liczb dodatnich/ujemnych, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Niech n będzie liczbą całkowitą nieparzystą. Wtedy $n = 2k + 1$ przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$, więc
$n^2 + 2023 = (2k + 1)^2 + 2023 = 4k^2 + 4k + 1 + 2023 = 4k(k + 1) + 2024$.
Jeżeli k jest liczbą parzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez 8 jako iloczyn liczby 4, liczby parzystej k i liczby całkowitej $k + 1$.
Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to liczba $4k(k + 1)$ jest podzielna przez 8 jako iloczyn liczby 4, liczby parzystej $k + 1$ i liczby całkowitej k.
Liczba 2024 jest podzielna przez 8, gdyż $2024 = 8 \cdot 253$.
Zatem liczba $4k(k + 1) + 2024$ jest podzielna przez 8 jako suma liczb podzielnych przez 8. To kończy dowód.

Sposób 2.

Zauważmy, że $n^2 + 2023 = n^2 - 1 + 2024 = (n - 1)(n + 1) + 8 \cdot 506$.
Ponieważ n jest liczbą całkowitą nieparzystą, to $n - 1$ i $n + 1$ to dwie kolejne liczby parzyste. Zatem jedna z tych liczb jest podzielna przez 4. Stąd wynika, że iloczyn $(n - 1)(n + 1)$ jest podzielny przez $2 \cdot 4 = 8$. Suma dwóch liczb podzielnych przez 8 jest podzielna przez 8. To kończy dowód.

Zadanie 10.1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 10.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

Zadanie 10.3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia (lub wyznaczenia) współczynnika a i zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą a

LUB

zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ bez uzasadnienia, że $a = -2$.

1 pkt – poprawne odczytanie z wykresu współrzędnych wierzchołka paraboli i zapisanie $f(x) = a(x-1)^2 + 8$ (lub zapisanie $f(x) = a(x-1)^2 + 8$ z arbitralnie przyjętym współczynnikiem $a \neq -2$)

LUB

poprawne odczytanie z wykresu miejsc zerowych funkcji f i zapisanie $f(x) = a(x+1)(x-3)$

LUB

zapisanie wzoru funkcji f w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i zapisanie trzech poprawnych równań z niewiadomymi a, b oraz c.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie odczyta jedną współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający błędnie odczyta jedną współrzędną wierzchołka lub innego punktu należącego do wykresu funkcji f i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze równanie z jedną niewiadomą a, i na tym zakończy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

Odczytujemy z wykresu funkcji f współrzędne wierzchołka paraboli: $p = 1$ oraz $q = 8$.

Zatem $f(x) = a(x-1)^2 + 8$.

Z wykresu odczytujemy jedno z miejsc zerowych funkcji f, np. $x = -1$. Ponieważ $f(-1) = 0$, więc

$$0 = a(-1-1)^2 + 8$$

$$a = -2$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach; V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 13.1 (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie; V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13.2 (0–3)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
dla sposobów 1. i 2.
3 pkt – poprawna metoda obliczenia masy leku tuż przed przyjęciem jedenastej dawki i poprawny wynik: $99{,}9$ mg.
2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na sumę początkowych kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie sumy w postaci $100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$

LUB
wypisanie wszystkich mas leku pozostających w organizmie tuż przed przyjęciem jedenastej dawki (z kolejno przyjmowanych dawek) albo mas leku pozostałych z przyjęcia pierwszej dawki po kolejnych okresach czterodniowych i zastosowanie bezpośredniego zsumowania wyrazów, np.:
$50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + 3{,}125 + 1{,}56 + 0{,}781 + 0{,}391 + 0{,}195 + 0{,}098$
LUB
poprawne obliczenie masy leku pozostającego w organizmie po 4, 8, 12 itd. dniach (tuż przed przyjęciem kolejnej dawki): 50 mg, 75 mg, $87{,}5$ mg, itd.
LUB
poprawne obliczenie masy leku pozostającego w organizmie tuż po przyjęciu kolejnych dawek leku: 100 mg, 150 mg, 175 mg, $187{,}5$ mg, itd.

1 pkt – poprawne wyznaczenie mas leku, jakie pozostały w organizmie z poszczególnych dawek na moment przed przyjęciem jedenastej dawki:
$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ mg, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$ mg, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$ mg, …, $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ mg
LUB
obliczenie poszczególnych mas leku pozostających w organizmie przed przyjęciem jedenastej dawki: 50 mg (z dziesiątej dawki), 25 mg (z dziewiątej dawki), …, $0{,}098$ mg (z pierwszej dawki)
LUB
zapisanie sumy $m(4) + m(8) + \ldots + m(40)$
LUB
obliczenie mas leku pozostałych z przyjęcia pierwszej dawki po kolejnych okresach czterodniowych: 50 mg, 25 mg, …, $0{,}098$ mg.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający poprawnie określa masę leku w organizmie tuż po przyjęciu kolejnych dawek (lub tuż przed przyjęciem kolejnych dawek), lecz popełnia błąd przy ustaleniu liczby przyjętych dawek i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przy sumowaniu mas leku, jakie pozostały w organizmie z poszczególnych dawek na moment przed przyjęciem jedenastej dawki, określi pierwszy wyraz ciągu jako 100 i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Pacjent przyjmuje jedenastą dawkę leku po 40 dniach, licząc od momentu przyjęcia pierwszej dawki.
Tuż przed przyjęciem jedenastej dawki leku w organizmie pacjenta znajduje się:

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ mg leku z pierwszej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$ mg leku z drugiej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ mg leku z trzeciej dawki,

⋮

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ mg leku z dziewiątej dawki,

$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$ mg leku z dziesiątej dawki.

Łącznie w organizmie pacjenta znajduje się

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 100\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 99{,}9 \text{ mg leku.}$$

Sposób 2.

Obliczamy i zapisujemy w lewej tabeli łączną masę leku (w mg), który jest w organizmie pacjenta tuż po przyjęciu każdej kolejnej dawki 100 mg tego leku.
W prawej tabeli obliczamy i zapisujemy masę leku (w mg), który pozostaje w organizmie pacjenta tuż przed przyjęciem kolejnej dawki, z uwzględnieniem czasu półtrwania tego leku ($T = 4$ doby) w organizmie pacjenta.

tuż po przyjęciu	
1. dawki	100
2. dawki	150
3. dawki	175
4. dawki	187,5
5. dawki	193,75
6. dawki	196,88
7. dawki	198,44
8. dawki	199,22
9. dawki	199,61
10. dawki	199,81

tuż przed przyjęciem	
50	2. dawki
75	3. dawki
87,5	4. dawki
93,75	5. dawki
96,88	6. dawki
98,44	7. dawki
99,22	8. dawki
99,61	9. dawki
99,81	10. dawki
99,9	11. dawki

Zatem tuż przed przyjęciem jedenastej dawki łączna masa tego leku w organizmie pacjenta jest równa $99{,}9$ mg.

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 17. (0-1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku: $|OD| = 6$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OCD|$ (z założenia), $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD|$ (jako miary kątów wierzchołkowych) oraz $|\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle CDO|$ (z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie), więc trójkąty ABO i ODC są podobne na mocy cechy *kkk* podobieństwa trójkątów.
Zatem

$$\frac{|CO|}{|AO|} = \frac{|OD|}{|OB|}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{|OD|}{3}$$

$$|OD| = 6$$

Długość boku OD trójkąta ODC jest równa 6.

Zadanie 19. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu).

Zasady oceniania
2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.
1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
1. B 2. E

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych […]. VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A2

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 26. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastosłupów oraz ostrosłupów podobnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 28. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […]. XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i podanie poprawnego wyniku: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10}{9000}$.

2 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych i liczby wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|\Omega|=9000$, $|A|=10$.

1 pkt – obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=9999-999=9\,000$

LUB

wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niezapisanie żadnego niewłaściwego:

$$1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$$

LUB

obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=10$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze tylko $P(A)=\frac{10}{9000}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ losy są ponumerowane kolejno od 1000 do 9999, więc początkowa liczba wszystkich losów na tej loterii jest równa $9999-999=9000$. Zatem $|\Omega|=9000$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że pierwszy wylosowany z pojemnika los był wygrywający. Wtedy

$A=\{1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000\}$, więc $|A|=10$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10}{9000}=\frac{1}{900}$$

Zadanie 29. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości boków równoległoboku o największym polu, poprawne wyznaczenie dziedziny funkcji P, oraz podanie prawidłowych wyników: $D = (0, 100)$, $x = 50$, $b = 50$ oraz $P(50) = 1250$.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole P równoległoboku w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny D tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu x_{opt}, dla którego funkcja pola osiąga wartość największą:

$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}$, $D = (0, 100)$, $x_{opt} = 50$.

LUB

poprawna metoda obliczenia długości boków równoległoboku o największym polu oraz podanie prawidłowych wyników bez wyznaczonej dziedziny: $x = 50$, $b = 50$ oraz $P(50) = 1250$.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole równoległoboku w zależności od jednej zmiennej:

$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole równoległoboku w zależności od długości dwóch sąsiednich boków równoległoboku, np.: $P = x \cdot b \cdot \sin 30°$

LUB

zapisanie związku między długościami boków równoległoboku, np.: $2x + 2b = 200$

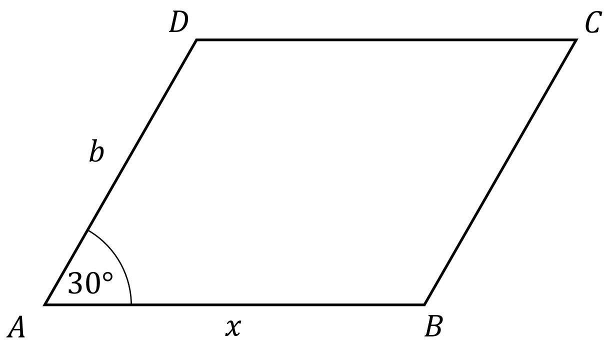
LUB

zapisanie zakresu zmienności długości x boku równoległoboku, np. $x > 0$ i $x < 100$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez x oraz b długości boków równoległoboku o obwodzie równym 200 i kącie ostrym o mierze $30°$ (zobacz rysunek).



Ponieważ $2x + 2b = 200$ oraz $x > 0$ i $b > 0$, więc $b = 100 - x$ i $x \in (0, 100)$.

Wyznaczamy pole P równoległoboku jako funkcję jednej zmiennej x:

$$P = x \cdot b \cdot \sin 30°$$

$$P(x) = x \cdot (100 - x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x$$

dla $x \in (0, 100)$.
Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć wartość największą dla argumentu równego pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, tj. dla $x = -\frac{50}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 50$. Ponieważ $50 \in (0, 100)$, więc funkcja P osiąga wartość największą dla argumentu $x = 50$. Wtedy $b = 100 - x = 100 - 50 = 50$ oraz $P(50) = 50 \cdot (100 - 50) \cdot \frac{1}{2} = 1250$.
Z rozważanych równoległoboków największe pole – równe 1250 – ma ten, który jest rombem o boku długości 50.

Zadanie 30.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PP

Zadanie 30.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B