CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **11 maja 2022 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

EMAP-R0-**100**-2205

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
6. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\log_3 \sqrt{27} - \log_{27} \sqrt{3}$ jest równa

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{11}{12}$ **D.** 3

Zadanie 2. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$.
Wartość pochodnej tej funkcji dla argumentu $x = \frac{1}{2}$ jest równa

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{54}{8}$

Zadanie 3. (0–1)

Jeżeli $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, to wartość wyrażenia $\sin\left(\beta - \frac{1}{3}\pi\right)$ jest równa

A. $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

Zadanie 4. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie są jedna kula biała i sześć kul czarnych, w drugiej urnie są cztery kule białe i trzy kule czarne.
Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – jedną kulę z drugiej urny.
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kulę białą w tym doświadczeniu, jest równe

A. $\frac{5}{14}$ **B.** $\frac{9}{14}$ **C.** $\frac{5}{7}$ **D.** $\frac{6}{7}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)n^3+n^2+p}$,

gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość p, dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Rozwiąż równanie:

$$|x - 3| = 2x + 11$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 8. (0–3)

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB. Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB.

Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 9. (0–4)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa (-30).

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	9.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 10. (0–4)

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny.

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n). Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz b_1.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	11.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

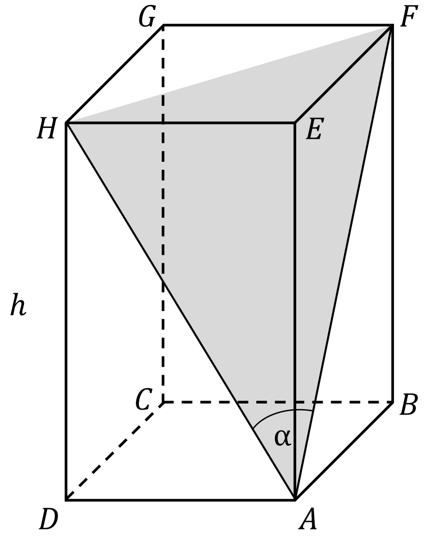
$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	12.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–5)

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe $26{,}4$.

Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (-3, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża się wzorem $P(b) = \frac{(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}}{2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P.

c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)