

| | |
|-----------------------------------|--|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i> | Zasady oceniania rozwiązań zadań |
| <i>Egzamin:</i> | Egzamin maturalny |
| <i>Przedmiot:</i> | Matematyka |
| <i>Poziom:</i> | Poziom rozszerzony |
| <i>Formy arkusza:</i> | EMAP-R0-100-2106, EMAP-R0-200-2106, EMAP-R0-300-2106, EMAP-R0-400-2106, EMAP-R0-700-2106, EMAP-R0-Q00-2106 |
| <i>Termin egzaminu:</i> | 2 czerwca 2021 r. |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | 21 czerwca 2021 r. |

ZADANIA ZAMKNIĘTE

| | | | | |
|------------|----|----|----|----|
| Nr zadania | 1. | 2. | 3. | 4. |
| Odp. | D | D | B | D |

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)**Zadanie 5. (0–2)****Zasady oceniania**

2 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna, niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 2 |
|---|---|---|

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)**Zasady oceniania**

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy podczas przekształcenia wyrażenia $\log_3 54$ lub $\frac{3 \log_2 9 + 2}{\log_2 9}$ poprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm iloczynu/ilorazu, lub logarytm potęgi, np.:

$$\log_3 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 3}, \quad \log_2 9 = 2 \log_2 3, \quad \log_3 54 = \log_3 27 + \log_3 2$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przekształci wyrażenie $\log_3 54$ lub $\frac{3 \log_2 9 + 2}{\log_2 9}$ lub oba te wyrażenia do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm

iloczynu/ilorazu, lub logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego uzyskuje się tezę.

Zdający otrzymuje **3 p.**
gdy, stosując poprawną metodę, przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga:

Jeżeli zdający, przy rozpoczęciu przekształcania wyrażenia $\log_3 54$ lub $\frac{3\log_2 9+2}{\log_2 9}$, popełnia błąd rzeczowy (niepoprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm ilorazu/iloczynu, lub logarytm potęgi), lecz w dalszej części rozwiązania każdorazowo stosuje te wzory poprawnie, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $\log_3 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\log_3 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 3}$$

Stosujemy wzór na logarytm iloczynu i otrzymujemy:

$$\frac{\log_2 54}{\log_2 3} = \frac{\log_2(27 \cdot 2)}{\log_2 3} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 3}$$

Aby doprowadzić do uzyskania w mianowniku wyrażenia $\log_2 9$, mnożymy licznik i mianownik przez 2, a następnie korzystamy ze wzoru na logarytm potęgi:

$$\frac{2 \cdot \log_2 27 + 2 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \log_2 3} = \frac{\log_2 3^6 + 2}{\log_2 9} = \frac{3\log_2 9 + 2}{\log_2 9} = \frac{3c + 2}{c}$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)**Zasady oceniania**

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy:

- zapisze, że trójkąt BEC jest podobny do trójkąta BFH oraz zapisze związek między wysokościami tych trójkątów opuszczonymi na prostą AB (lub zapisze związek między polami tych trójkątów), np.: $h_{BEC} = 3h_{BFH}$ (lub $P_{EBC} = 9S$)

ALBO

- zapisze, że trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC oraz zapisze związek między wysokościami tych trójkątów opuszczonymi na prostą AB (lub zapisze związek między polami tych trójkątów), np.: $h_{AEC} = 2h_{ADG}$ (lub $P_{AEC} = 4P_{ADG}$)

ALBO

- zapisze związek między polami trójkątów AEC i EBC , np.: $P_{AEC} = \frac{4}{3}P_{EBC}$

ALBO

- zapisze, że $P_{ABC} = 21S$ i $P_{EBC} = 9S$.

Zdający otrzymuje **2 p.**
gdy:

- zapisze związki między polami trójkątów ADG i AEC oraz AEC i EBC , np.:
 $\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{4}{3}$ i $P_{AEC} = 4P_{ADG}$

ALBO

- zapisze związki między polami trójkątów BEC i BFH oraz AEC i EBC , np.:
 $\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{4}{3}$ i $P_{BEC} = 9P_{BFH}$

ALBO

- zapisze związki między polami trójkątów ADG i AEC oraz BEC i BFH , np.:
 $P_{AEC} = 4P_{ADG}$ i $P_{BEC} = 9P_{BFH}$

ALBO

- zapisze układ równań z polem p trapezu $DECG$ oraz polem q trójkąta ADG jako niewiadomymi, np.:

$$\begin{cases} p + q = 12S \\ \frac{p + q}{q} = 4 \end{cases}$$

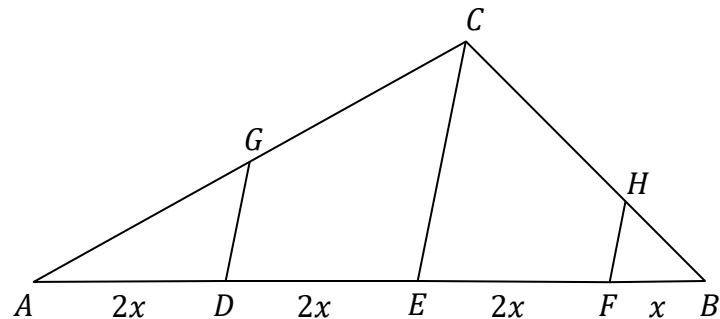
Zdający otrzymuje **3 p.**
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:

Jeśli zdający wprowadza do rozwiązania dodatkowe założenia, nie wynikające z treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób 1.

Oznaczmy pole trójkąta FBH przez S , a długość odcinka FB przez x . Zgodnie z treścią zadania $|AD| = |DE| = |EF| = 2|FB| = 2x$.



Odcinki EC i FH są równoległe, więc trójkąt EBC jest podobny do trójkąta FBH na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{EBC}}{P_{FBH}} = \left(\frac{|EB|}{|FB|}\right)^2 = \left(\frac{3x}{x}\right)^2 = 9$$

więc

$$P_{EBC} = 9S$$

Trójkąty EBC i AEC mają wspólną wysokość h , poprowadzoną z wierzchołka C . Zatem

$$\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |EB| \cdot h} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

więc

$$P_{AEC} = \frac{4}{3} \cdot P_{EBC} = 12S$$

Odcinki DG i EC są równoległe, więc trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{ADG}}{P_{AEC}} = \left(\frac{|AD|}{|AE|}\right)^2 = \left(\frac{2x}{4x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

więc

$$P_{ADG} = \frac{1}{4} \cdot P_{AEC} = 3S$$

To należało wykazać.

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.

Sposób 2.

Oznaczmy przez h wysokość trójkąta BFH , natomiast przez a długość odcinka $|FB|$.

Wtedy pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 3h = 21S$ oraz

$$P_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3h = 9S.$$

Odcinki DG i EC są równoległe, więc trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów w skali $k = 0,5$. Niech pole trapezu $DECG$ będzie równe p , natomiast pole trójkąta ADG będzie równe q .

Wtedy

$$\begin{cases} p + q = 12S \\ \frac{p + q}{q} = 4 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $p = 9S$ oraz $q = 3S$, co jest tezą twierdzenia.

Zadanie 8. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy zapisze równanie w postaci, w której występują funkcje trygonometryczne tego samego kąta, np.: $2 \cos^2 x - \cos x = 2 \sin x \cos x - \sin x$.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy zapisze alternatywę równań $\cos x - \sin x = 0$ lub $2 \cos x - 1 = 0$.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy wyznaczy rozwiązania jednego z równań $\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ lub w R .

Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy wyznaczy rozwiązania obu równań $\cos x = \frac{1}{2}$ **oraz** $\cos x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$x = \frac{1}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{5}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{1}{4}\pi \text{ lub } x = \frac{5}{4}\pi.$$

Uwagi:

- Jeżeli zdający podzieli równanie przez $(\cos x - \sin x)$ albo przez $(2 \cos x - 1)$ bez stosownych założeń i nie rozważy przypadków, gdy to wyrażenie jest równe zero, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$2 \cos^2 x - \cos x = 2 \sin x \cos x - \sin x$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\cos x \cdot (2 \cos x - 1) - \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x = \sin x$$

Rozwiązaniami pierwszego z tych równań w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ są: $x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$.

Rozwiązaniami równania $\cos x = \sin x$ w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ są: $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$.

Zatem równanie $2 \cos^2 x - \cos x = \sin(2x) - \sin x$ ma w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ cztery rozwiązania: $x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$.

Zadanie 9. (0–4)**Zasady oceniania**

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy zapisze odległość punktu $P = (x_P, y_P)$ od jednej z prostych, np.:

$$\frac{|x_P - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2x_P + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy wyznaczy odległość punktu $P = (x_P, y_P)$ od jednej z prostych w zależności od jednej zmiennej, np.

$$\frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad \text{lub}$$

$$\frac{|(y_P - 4) - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2(y_P - 4) + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą, opisujące zależność między odległościami punktu $P = (x_P, y_P)$ od obu prostych, np.:

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.

$$\frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \cdot \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad \text{lub}$$

$$\frac{|(y_P - 4) - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \cdot \frac{|2(y_P - 4) + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy obliczy i zapisze współrzędne punktu P : $P = (-2, 2)$ oraz $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający zapisuje równanie „odległości” i w tym równaniu pomija zupełnie symbol wartości bezwzględnej, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający sporządzi rysunek, zapisze współrzędne jednego z szukanych punktów $(-2, 2)$, obliczy odległości punktu $(-2, 2)$ od prostych k i l oraz zapisze, że odległość tego punktu od prostej k jest dwa razy większa niż odległość tego punktu od prostej l , to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $P = (x_P, y_P)$ będzie punktem leżącym na prostej o równaniu $y = x + 4$. Wtedy $y_P = x_P + 4$.

Odległość $d(P, k)$ punktu P od prostej k o równaniu $x - 2y = 0$ jest równa

$$d(P, k) = \frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-x_P - 8|}{\sqrt{5}}$$

Odległość $d(P, l)$ punktu P od prostej l o równaniu $2x + y - 1 = 0$ jest równa

$$d(P, l) = \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3x_P + 3|}{\sqrt{5}}$$

Z treści zadania $d(P, k) = 2 \cdot d(P, l)$, więc

$$\frac{|-x_P - 8|}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \frac{|3x_P + 3|}{\sqrt{5}}$$

Stąd otrzymujemy kolejno

$$|-x_P - 8| = 2 \cdot |3x_P + 3|$$

$$|-x_P - 8| = |6x_P + 6|$$

$$-x_P - 8 = 6x_P + 6 \quad \text{lub} \quad -(-x_P - 8) = 6x_P + 6$$

$$x_P = -2 \quad \text{lub} \quad x_P = \frac{2}{5}$$

Dla $x_p = -2$ otrzymujemy $P = (-2, 2)$. Dla $x_p = \frac{2}{5}$ otrzymujemy $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Istnieją zatem dwa punkty spełniające warunki zadania: $(-2, 2)$ oraz $\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Zadanie 10. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy:

- obliczy długości boków CF i CS : $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$

ALBO

- obliczy tylko długość boku $|FS|$: $|FS| = 3$.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy obliczy długości trzech boków trójkąta CFS : $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$ oraz $|FS| = 3$.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy zapisze zależność, wynikającą z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CFS , np. $(\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(\sphericalangle CFS)$.

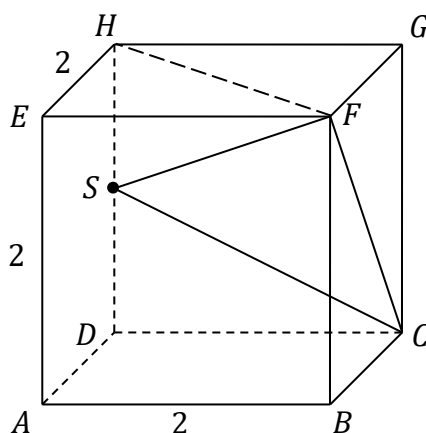
Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy wyznaczy miarę kąta CFS : $|\sphericalangle CFS| = 45^\circ$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od obliczenia długości boków trójkąta CFS . Mamy oczywiście $|CF| = 2\sqrt{2}$ oraz $|CS| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Dorysujmy teraz odcinek FH .



Oczywiście $|\sphericalangle FHS| = 90^\circ$, więc

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.

$$|FS| = \sqrt{|FH|^2 + |HS|^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$$

Trójkąt CFS ma zatem boki o następujących długościach: $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$ oraz $|FS| = 3$.

Najmniejszy kąt wewnętrzny trójkąta znajduje się naprzeciw najkrótszego boku, zatem jest nim kąt CFS .

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CFS wynika, że

$$|CS|^2 = |CF|^2 + |FS|^2 - 2 \cdot |CF| \cdot |FS| \cdot \cos(\sphericalangle CFS)$$

Stąd otrzymujemy

$$(\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(\sphericalangle CFS)$$

$$5 = 8 + 9 - 12\sqrt{2} \cdot \cos(\sphericalangle CFS)$$

$$\cos(\sphericalangle CFS) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

więc najmniejszy kąt w trójkącie CFS ma miarę 45° .

Zadanie 11. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy:

- poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń wszystkich uczestników programu, np. $(n + 3)!$

ALBO

- poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń, w których sportowcy siedzą obok siebie np. $(n + 1) \cdot 3! \cdot n!$.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń, w których sportowcy siedzą obok siebie, np. $(n + 1) \cdot 3! \cdot n!$ lub innym rozumowaniem $3! \cdot (n + 1)!$ oraz liczbę wszystkich rozmieszczeń $(n + 3)!$.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy zapisze równanie $\frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{15}$.

Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy poprawnie obliczy liczbę aktorów: 7.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę aktorów uczestniczących w programie ($n \in \mathbb{N}$), natomiast A – zdarzenie polegające na tym, że trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc. Wtedy

$$P(A) = \frac{3! \cdot (n+1)!}{(n+3)!}$$

Stąd po uproszczeniu otrzymujemy

$$P(A) = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

Z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{15}$$

co prowadzi do

$$(n+2)(n+3) = 90$$

$$n^2 + 5n - 84 = 0$$

$$(n-7)(n+12) = 0$$

Zatem $n = 7$, gdyż $n = -12$ przeczy założeniom. W tym programie bierze zatem udział 7 aktorów.

Zadanie 12. (0–5)**Zasady oceniania****Zdający otrzymuje 1 p.**

gdy:

- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania i liczba 3 musi być jednokrotnym pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$

ALBO

- zapisze, że $\Delta = 0$ i $x_0 \neq 3$ (tj. dwukrotny pierwiastek trójmianu jest różny od 3)

ALBO

- rozwiąże równanie $\Delta = 0$, otrzymując $m = \frac{1}{5}$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy:

- rozwiąże równanie $\Delta = 0$, otrzymując $m = \frac{1}{5}$ i sprawdzi, że dla $m = \frac{1}{5}$ trójmian $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$ ma jeden pierwiastek podwójny różny od liczby 3

ALBO

- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania i wyznaczy pierwiastki trójmianu $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$:

$$x_1 = \frac{-m + 1 - |5m - 1|}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m + 1 + |5m - 1|}{2}$$

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy:

- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania, wyznaczy pierwiastki x_1 oraz x_2 trójmianu $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$ i zapisze je bez użycia wartości bezwzględnej: $x_1 = 2m$ oraz $x_2 = -3m + 1$

ALBO

- zapisze równanie $3^2 + (m - 1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$.

Zdający otrzymuje 4 p.

gdy:

- zapisze alternatywę $(m = \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad m \neq \frac{3}{2})$ lub $(m \neq \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad m = \frac{3}{2})$ lub $(m \neq \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad m = -\frac{2}{3})$

ALBO

- rozwiąże równanie $3^2 + (m - 1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$.

Zdający otrzymuje 5 p.gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: $m = -\frac{2}{3}$ lub $m = \frac{1}{5}$ lub $m = \frac{3}{2}$.

Uwaga:

Jeśli zdający popełnia błąd, zapisując $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(5m-1)^2} = 5m-1$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób 1.

Jednym z rozwiązań równania jest liczba $x_3 = 3$. Jeśli podane równanie ma mieć dokładnie dwa rozwiązania, to trójmian kwadratowy $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$ powinien mieć pierwiastek podwójny inny niż 3 albo dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m-1)^2$$

Zatem dla każdej liczby rzeczywistej m ten wyróżnik przyjmuje wartość nieujemną. Pierwiastkami tego trójmianu są więc liczby

$$x_1 = \frac{-m+1-|5m-1|}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m+1+|5m-1|}{2}$$

Dla $m \in (-\infty, \frac{1}{5})$ otrzymujemy

$$x_1 = \frac{-m+1+5m-1}{2} = 2m \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m+1-5m+1}{2} = -3m+1$$

Dla $m \in [\frac{1}{5}, +\infty)$ otrzymujemy

$$x_1 = \frac{-m+1-5m+1}{2} = -3m+1 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m+1+5m-1}{2} = 2m$$

Zatem, z dokładnością do oznaczeń, dla każdego $m \in R$ zachodzi $x_1 = 2m$ oraz $x_2 = -3m+1$.

Należy zatem rozpatrzyć trzy sytuacje:

$(\Delta = 0 \text{ i } x_1 \neq 3)$ lub $(\Delta > 0 \text{ i } x_1 = 3)$ lub $(\Delta > 0 \text{ i } x_2 = 3)$.

Rozpatrując każdą z nich, otrzymujemy odpowiednio:

$(m = \frac{1}{5} \text{ i } m \neq \frac{3}{2})$ lub $(m \neq \frac{1}{5} \text{ i } m = \frac{3}{2})$ lub $(m \neq \frac{1}{5} \text{ i } m = -\frac{2}{3})$

$$m = \frac{1}{5} \quad \text{lub} \quad m = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{2}{3}$$

Zatem podane w treści zadania równanie ma dokładnie dwa rozwiązania dla $m \in \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\}$.

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.

Sposób 2.

Jednym z rozwiązań równania jest liczba $x_3 = 3$. Jeśli podane równanie ma mieć dokładnie dwa rozwiązania, to trójmian kwadratowy $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$ powinien mieć pierwiastek podwójny inny niż 3 albo dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$:

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m - 1)^2$$

Dla $m = \frac{1}{5}$ trójmian ma dwukrotny pierwiastek $x_0 = \frac{-m+1}{2} = \frac{2}{5}$ różny od 3.

Sprawdzamy, dla jakich wartości m liczba 3 jest pierwiastkiem trójmianu $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$:

$$3^2 + (m - 1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$$

$$-6m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$m = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{2}{3}$$

Ponieważ dla każdej z tych otrzymanych wartości $m = \frac{3}{2}$ oraz $m = -\frac{2}{3}$ wyróżnik Δ jest większy od zera, więc w obu przypadkach trójmian $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Zatem podane w treści zadania równanie ma dokładnie dwa rozwiązania dla $m \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$.

Zadanie 13. (0–5)**Zasady oceniania****Zdający otrzymuje 1 p.**

gdy:

- obliczy pochodną funkcji $f: f'(x) = \frac{2x^3-k}{x^2} =$ dla $x \neq 0$

ALBO

- zapisze równanie wynikające z faktu, że punkt styczności należy do wykresu funkcji f :

$$-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$$

ALBO

- skorzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej funkcji w punkcie i zapisze równanie: $f'(x_0) = -1$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy skorzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej funkcji w punkcie i zapisze równanie:

$$\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1.$$

Zdający otrzymuje 3 p.gdy zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi x_0 oraz k prowadzący dowyznaczenia parametru k , np.: $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$ i $\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1$.**Zdający otrzymuje 4 p.**gdy obliczy z układu równań $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$ i $\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1$ niewiadomą x_0 : $x_0 = -\frac{2}{3}$.**Uwaga:**Wystarczy, że zdający rozwiąże równanie $3x_0^3 = -2x_0^2$ w zbiorze \mathbb{R} : $x_0 = -\frac{2}{3}$, $x_0 = 0$.**Zdający otrzymuje 5 p.**gdy zastosuje poprawną metodę i uzyska poprawny wynik: $k = -\frac{4}{27}$.**Uwagi:**1 Jeśli zdający przy wyznaczaniu pochodnej popełnia błąd w potęgze zmiennej lub traktuje parametr k jako zmienną, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za zapisanie warunku

$$-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0} \text{ lub za zapisanie, że } f'(x_0) = -1.$$

2. Jeśli zdający, obliczając pochodną funkcji f , zapisze $f'(x) = \frac{2x^3+k}{x^2}$ (tj. błędnie ustali znak przed współczynnikiem k), to błąd ten traktujemy jako błąd rachunkowy.

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech punkt $P = (x_0, y_0)$, gdzie $x_0 \neq 0$, będzie punktem styczności prostej $y = -x$ do wykresu funkcji f . Wtedy $y_0 = -x_0$, więc

$$-x_0 = \frac{x_0^3 + k}{x_0}$$

Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + k) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^3 - k}{x^2}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Z warunków zadania wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy (-1) ; jest on

wartością pochodnej dla x_0 . Zatem $\frac{2x_0^3 - k}{x_0^2} = -1$. Otrzymujemy układ równań

$$-x_0 = \frac{x_0^3 + k}{x_0} \quad \text{i} \quad \frac{2x_0^3 - k}{x_0^2} = -1$$

Dla $x_0 \neq 0$ jest on równoważny układowi

$$x_0^3 + k = -x_0^2 \quad \text{i} \quad 2x_0^3 - k = -x_0^2$$

Stąd otrzymujemy równanie $3x_0^3 = -2x_0^2$.

Ponieważ $x_0 \neq 0$, więc dzieląc obie strony tego równania przez $3x_0^2$, otrzymujemy $x_0 = -\frac{2}{3}$.

Zatem $k = -x_0^3 - x_0^2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$.

Zadanie 14. (0–5)**Zasady oceniania**

Zdający otrzymuje **1 p.**

gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą (długością boku AB albo AD), wynikające z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABD , np.

$$|AB|^2 = (2|AB|)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot |AB| \cdot 6 \cdot \cos(\sphericalangle ADB)$$

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy obliczy długość boku AB lub AD : $|AB| = 4$, $|AD| = 8$.

Zdający otrzymuje **3 p.**

gdy zastosuje twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu oraz twierdzenie Pitagorasa

i zapisze układ równań z niewiadomymi $|BC|$ i $|CD|$:
$$\begin{cases} |CD| = |BC| + 4 \\ |BC|^2 + |CD|^2 = 36 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy nie odrzuci rozwiązania $|AB| = 3$, rozwiąże dwa równania:

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = 36 \quad \text{oraz} \quad |BC|^2 + (|BC| + 3)^2 = 36$$

i zapisze dwa dodatnie rozwiązania tych równań: $|BC| = -2 + \sqrt{14}$ oraz $|BC| = \frac{-3+3\sqrt{7}}{2}$.

Zdający otrzymuje **5 p.**

gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: $|BC| = -2 + \sqrt{14}$.

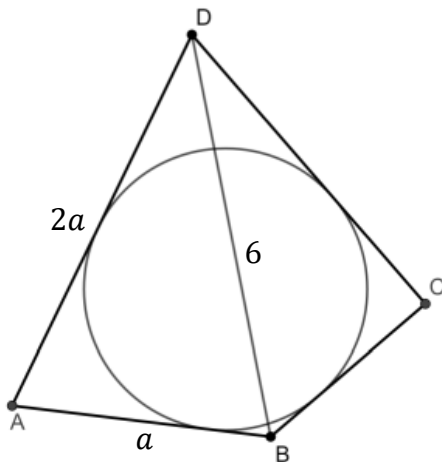
Uwagi:

1. Jeśli zdający zakłada błędnie, że $\cos(\sphericalangle BAD) = \frac{7}{8}$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że $|AB| = 2 \cdot |AD|$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeśli zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, wynikające z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu oraz z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta BCD , np.: $|AB| + \sqrt{36 - |BC|^2} = |BC| + 2 \cdot |AB|$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy $a = |AB|$.

Egzamin maturalny z matematyki (poziom rozszerzony) – sesja dodatkowa 2021 r.



Do trójkąta ABD stosujemy twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$a^2 = (2a)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2a \cdot 6 \cdot \cos(\sphericalangle ADB)$$

Ponieważ $\cos(\sphericalangle ADB) = \frac{7}{8}$, więc

$$a^2 = (2a)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2a \cdot 6 \cdot \frac{7}{8}$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$a = 3 \quad \text{lub} \quad a = 4$$

i po uwzględnieniu warunku $|AB| > \sqrt{15}$ otrzymujemy $|AB| = 4$ oraz $|AD| = 8$.
Korzystamy z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i otrzymujemy

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

$$4 + |CD| = |BC| + 8$$

$$|CD| = |BC| + 4$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym BCD i otrzymujemy kolejno:

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = |BD|^2$$

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = 36$$

$$|BC|^2 + 4|BC| - 10 = 0$$

$$|BC| = -2 - \sqrt{14} \quad \text{lub} \quad |BC| = -2 + \sqrt{14}$$

Ponieważ $-2 - \sqrt{14} < 0$, więc $|BC| = -2 + \sqrt{14}$.

Zadanie 15. (0–7)

Łącznie za zadanie zdający może otrzymać 7 punktów: 2 punkty za rozwiązanie podpunktu a), 1 punkt za rozwiązanie podpunktu b) oraz 4 punkty za rozwiązanie podpunktu c).

Zasady oceniania dla podpunktu a)

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy:

- zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa oraz podanego obwodu tego trójkąta, np. $(4 - (x + b))^2 = x^2 + b^2$

ALBO

- zapisze układ równań $x^2 + y^2 = c^2$ i $y = 4 - x - c$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy wykaże, że pole P trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x wyraża się wzorem

$$P(x) = \frac{x(4-2x)}{4-x}.$$

Zasady oceniania dla podpunktu b)

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze, że dziedziną funkcji P jest przedział liczbowy $(0, 2)$.

Uwagi:

1. Punkt za wyznaczenie dziedziny funkcji zdający otrzymuje niezależnie od realizacji podpunktu a) zadania, pod warunkiem, że rozważy wyznaczoną przez siebie funkcję jednej zmiennej.

Zasady oceniania dla podpunktu c)

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wyznaczy pochodną funkcji P : $P'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 16}{(4-x)^2}$, gdzie $x \in (0, 2)$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zastosuje warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji P i obliczy miejsca zerowe pochodnej P' : $x = 4 - 2\sqrt{2}$.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy zbada znak pochodnej funkcji P oraz wyznaczy (z uzasadnieniem) wartość zmiennej x , dla której funkcja P przyjmuje wartość największą, np.:

$$P'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0, 4 - 2\sqrt{2})$$

$$P'(x) < 0 \text{ dla } x \in (4 - 2\sqrt{2}, 2)$$

Funkcja P jest rosnąca w przedziale $(0, 4 - 2\sqrt{2}]$ oraz malejąca w przedziale $[4 - 2\sqrt{2}, 2)$, więc w punkcie $x = 4 - 2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga największą wartość.

Zdający otrzymuje **4 p.**

gdy zapisze, że przy podanym obwodzie równym 4, największe pole równe $4(3 - 2\sqrt{2})$ ma trójkąt o bokach $4 - 2\sqrt{2}$, $4 - 2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2} - 4$.

Uwagi:

- Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji P z błędem, ale wyznaczona pochodna jest funkcją wymierną postaci $\frac{ax^2+bx+c}{(4-x)^2}$, gdzie $ax^2 + bx + c$ jest trójmianem kwadratowym, mającym wyróżnik dodatni, to zdający może otrzymać punkty za obliczenie miejsc zerowych pochodnej i wyznaczenie argumentu, dla którego pole osiąga największą wartość, o ile konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy miejsca zerowe pochodnej lub uzasadni istnienie największej wartości rozważanej funkcji.
- Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.
- Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:
 - opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji P ;
 - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość.
 Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (otrzymuje punkty za wyznaczenie pochodnej funkcji P oraz wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji P).
- Punkt za wyznaczenie największej wartości funkcji P i długości boków trójkąta o największym polu zdający otrzymuje wtedy, gdy otrzymał punkt za poprawne uzasadnienie, że funkcja P osiąga wartość największą w punkcie $x = 4 - 2\sqrt{2}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) i b)

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $b = |BC|$, $c = |AB|$.

Z warunków zadania $x + b + c = 4$, więc $c = 4 - (x + b)$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC i otrzymujemy

$$c^2 = x^2 + b^2$$

$$[4 - (x + b)]^2 = x^2 + b^2$$

$$b(4 - x) = 8 - 4x$$

$$b = \frac{8 - 4x}{4 - x}, \quad \text{gdzie } \frac{8 - 4x}{4 - x} > 0 \text{ i } 0 < x < 4$$

Wyznaczamy pole tego trójkąta, jako funkcję długości x jego przyprostokątnej AC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot b = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{8-4x}{4-x} = \frac{x(4-2x)}{4-x}$$

gdzie $\frac{8-4x}{4-x} > 0$ i $0 < x < 4$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P :

$$\frac{8-4x}{4-x} > 0 \text{ i } 0 < x < 4$$

$$0 < x < 2$$

Obliczamy pochodną funkcji P :

$$P'(x) = \frac{(4x-2x^2)' \cdot (4-x) - (4x-2x^2) \cdot (4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 16}{(4-x)^2}$$

dla $x \in (0, 2)$.

Obliczamy miejsce zerowe funkcji P' :

$$\frac{2x^2 - 16x + 16}{(4-x)^2} = 0$$

$$2x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 8 \cdot 16$$

$$x = \frac{16 + 8\sqrt{2}}{4} = 4 + 2\sqrt{2} \notin (0, 2) \quad \text{lub} \quad x = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{4} = 4 - 2\sqrt{2} \in (0, 2)$$

Badamy monotoniczność funkcji P :

$$P'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0, 4 - 2\sqrt{2})$$

$$P'(x) < 0 \text{ dla } x \in (4 - 2\sqrt{2}, 2)$$

Zatem

funkcja P jest rosnąca w przedziale $(0, 4 - 2\sqrt{2}]$,

funkcja P jest malejąca w przedziale $[4 - 2\sqrt{2}, 2)$.

Stąd w punkcie $x = 4 - 2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga największą wartość.

c)

$$\text{Gdy } x = 4 - 2\sqrt{2}, \text{ to wtedy } b = \frac{8-4x}{4-x} = \frac{4(2\sqrt{2}-2)}{2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Zatem } c = x\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4 \text{ i } P(4 - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{2})^2 = 4(3 - 2\sqrt{2}).$$

Spośród rozważanych trójkątów największe pole ma trójkąt o bokach $4 - 2\sqrt{2}$, $4 - 2\sqrt{2}$ oraz $4\sqrt{2} - 4$. Pole tego trójkąta jest równe $4(3 - 2\sqrt{2})$.