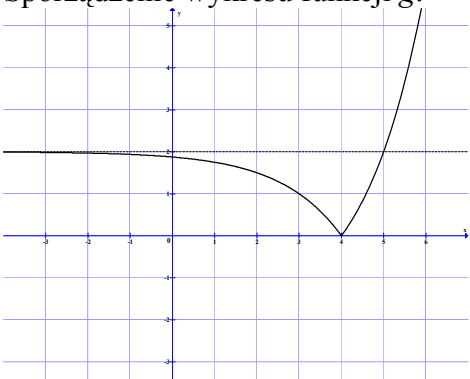
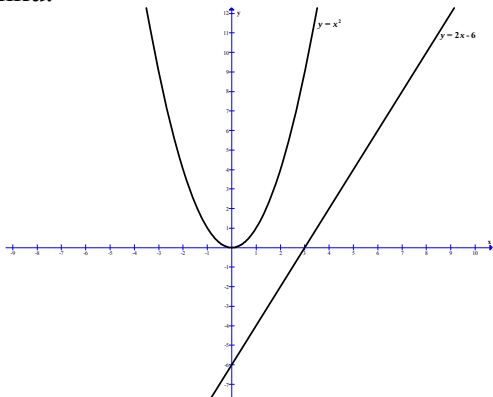


**ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA**  
**POZIOM ROZSZERZONY**

| Numer zadania | Etapy rozwiązania zadania |                                                                                                                                                                                                                                                       | Liczba punktów | Uwagi dla egzaminatorów                                                                        |
|---------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | 1.1                       | Podanie wartości $b$ : $b = 2$ .                                                                                                                                                                                                                      | 1              |                                                                                                |
|               | 1.2                       | <p>Sporządzenie wykresu funkcji <math>g</math>.</p>                                                                                                                  | 1              | Krzywa będąca wykresem funkcji $g$ dla $x < 4$ nie może przecinać prostej o równaniu $y = 2$ . |
|               | 1.3                       | Zapisanie szukanych wartości parametru $p$ : $p = 0$ lub $p \geq 2$ .                                                                                                                                                                                 | 1              |                                                                                                |
| 2             | 2.1                       | <p>Zastosowanie definicji wartości bezwzględnej i zapisanie:</p> $-4x - 12 < -x - 5 \text{ dla } x \in (-\infty, -5),$ $-4x - 12 < x + 5 \text{ dla } x \in \langle -5, -3 \rangle,$ $4x + 12 < x + 5 \text{ dla } x \in \langle -3, \infty \rangle.$ | 1              |                                                                                                |
|               | 2.2                       | <p>Rozwiązanie nierówności liniowych bez uwzględniania ograniczeń:</p> $x > -\frac{7}{3}, x > -\frac{17}{5}, x < -\frac{7}{3}.$                                                                                                                       | 1              |                                                                                                |
|               | 2.3                       | <p>Uwzględnienie ograniczeń, tzn. zapisanie zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności: zbiór pusty, <math>\left(-\frac{17}{5}, -3\right)</math>, <math>\left\langle -3, -\frac{7}{3} \right\rangle</math>.</p>                                     | 1              |                                                                                                |
|               | 2.4                       | <p>Wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną:</p> $\left(-\frac{17}{5}, -\frac{7}{3}\right).$                                                                                                                                  | 1              |                                                                                                |
|               | 2.1                       | <p><b>II sposób rozwiązania:</b><br/>Zapisanie danej nierówności w postaci : <math>4 x+3  &lt;  x+5 </math>.</p>                                                                                                                                      | 1              |                                                                                                |

|   |     |                                                                                                                                                     |   |                                                                                                                   |
|---|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | 2.2 | Podniesienie obu stron nierówności do drugiej potęgi:<br>$4^2 \cdot (x+3)^2 < (x+5)^2$ .                                                            | 1 |                                                                                                                   |
|   | 2.3 | Doprowadzenie nierówności do postaci iloczynowej: $(3x+7) \cdot (5x+17) < 0$<br>lub $15\left(x+\frac{17}{5}\right)\left(x+\frac{7}{3}\right) < 0$ . | 1 | Punkt przyznajemy, gdy zdający zapisze nierówność w postaci ogólnej i obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego. |
|   | 2.4 | Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in \left(-\frac{17}{5}, -\frac{7}{3}\right)$ .                                                          | 1 |                                                                                                                   |
|   | 2.1 | <b>Metoda graficzna.</b><br>Zapisanie danej nierówności w postaci: $4 x+3  <  x+5 $ .                                                               | 1 |                                                                                                                   |
|   | 2.2 | Sporządzenie wykresów funkcji $f(x) = 4 x+3 $ i $g(x) =  x+5 $ .                                                                                    | 1 |                                                                                                                   |
|   | 2.3 | Wyznaczenie odciętych punktów wspólnych wykresów funkcji $f$ i $g$ .                                                                                | 1 |                                                                                                                   |
|   | 2.4 | Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $\left(-\frac{17}{5}, -\frac{7}{3}\right)$ .                                                                | 1 |                                                                                                                   |
| 3 | 3.1 | Sporządzenie rysunku.<br>                                        | 1 | Na rysunku muszą być szkice wykresów obu funkcji podanych w zadaniu.                                              |
|   | 3.2 | Zapisanie współrzędnych dowolnego punktu paraboli w zależności od jednej zmiennej: np. $P = (x, x^2)$ .                                             | 1 |                                                                                                                   |
|   | 3.3 | Wyznaczenie odległości punktu $P$ od danej prostej: $d = \frac{ 2x - x^2 - 6 }{\sqrt{5}}$ .                                                         | 1 | .                                                                                                                 |
|   | 3.4 | Zapisanie odległości bez wartości bezwzględnej:<br>$d = \frac{(x-1)^2 + 5}{\sqrt{5}}$ lub $d = \frac{x^2 - 2x + 6}{\sqrt{5}}$ .                     | 1 |                                                                                                                   |

Próbný egzamin maturalny z matematyki  
Odpowiedzi i schemat punktowania – poziom rozszerzony

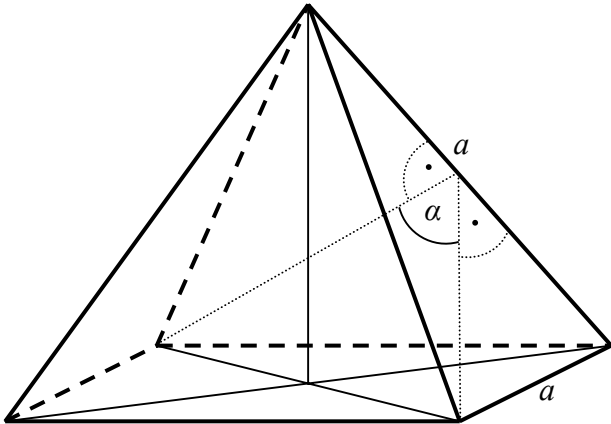
3

|   |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |                                                                                                                                                                        |
|---|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | 3.5 | Oszacowanie najmniejszej wartości: $d \geq \sqrt{5}$ .                                                                                                                                                                                                                         | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 3.4 | <b>II sposób rozwiązania: (czynności 3.4 i 3.5)</b><br>Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji $d(x) = \frac{ 2x - x^2 - 6 }{\sqrt{5}}$ :<br>$d_{\min} = \sqrt{5}$ .                                                                                                         | 1 | Zdający może wyznaczyć równanie prostej równoległej do danej prostej, stycznej do paraboli i obliczyć odległość między tymi prostymi równoległymi.                     |
|   | 3.5 | Zapisanie wniosku: $d \geq \sqrt{5}$ .                                                                                                                                                                                                                                         | 1 |                                                                                                                                                                        |
| 4 | 4.1 | Obliczenie prawdopodobieństw: $P(A) = \frac{2}{3}$ , $P(B) = \frac{3}{4}$ .                                                                                                                                                                                                    | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 4.2 | Zastosowanie prawa De Morgana: $A' \cap B' = (A \cup B)'$ .                                                                                                                                                                                                                    | 1 | Zdający nie musi wprost zapisywać prawa De Morgana.                                                                                                                    |
|   | 4.3 | Wykorzystanie wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.                                                                                                                                                                                                                        | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 4.4 | Obliczenie wartości $P(A' \cap B')$ : $P(A' \cap B') = \frac{1}{12}$ .                                                                                                                                                                                                         | 1 |                                                                                                                                                                        |
| 5 | 5.1 | Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $h(x) = \frac{a}{x-2} + 1$ .                                                                                                                                                                                                                | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 5.2 | Obliczenie współczynnika $a$ i zapisanie wzoru funkcji: $a = 2$ ,<br>$h(x) = \frac{2}{x-2} + 1$ .                                                                                                                                                                              | 1 | Wystarczy obliczenie współczynnika $a$ .<br>Akceptujemy podanie wzoru<br>$h(x) = \frac{x}{x-2}$ , bez uzasadnienia.<br>Przyznajemy wtedy punkty za czynności 5.1, 5.2. |
|   | 5.3 | Obliczenie wartości funkcji $h$ dla $x = \sqrt{3}$ : $h(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} - 3$<br>i zapisanie wniosku.                                                                                                                                                                    | 1 |                                                                                                                                                                        |
| 6 | 6.1 | Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia i zapisanie wyrażenia w postaci:<br>$2 - \sqrt{3} + 2 \cdot (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + 2 + \sqrt{3}$<br>lub $2 - \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} + 2 + \sqrt{3}$ . | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 6.2 | Obliczenie liczby $a$ : $a = 6$ .                                                                                                                                                                                                                                              | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 6.3 | Obliczenie liczby $b$ : $b = 9$ .                                                                                                                                                                                                                                              | 1 |                                                                                                                                                                        |
|   | 6.4 | Zapisanie wniosku wraz z uzasadnieniem: $a^b > b^a$ .                                                                                                                                                                                                                          | 1 |                                                                                                                                                                        |

|   |     |                                                                                                                                                                                               |   |                                                                                                                                                           |
|---|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7 | 7.1 | Zapisanie, że liczba $(-3)$ jest jednym z rozwiązań danego równania $(x+3)(x^2+5x+4)=0$ .                                                                                                     | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 7.2 | Rozwiązanie równania kwadratowego $x^2+5x+4=0$ : $x=-1$ , $x=-4$ .                                                                                                                            | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 7.3 | Rozwiązanie warunku, dla którego drugi czynnik równania nie ma rozwiązań: $\Delta < 0$ dla $p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ .                                                           | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 7.4 | Zapisanie układu warunków, dla których liczba $(-3)$ jest jedynym rozwiązaniem równania kwadratowego $x^2+(p+4)x+(p+1)^2=0$ :<br>$\Delta=0$ i $\frac{-b}{2a}=-3$ .                            | 1 | Wyznaczenie wszystkich wartości $p$ , dla których liczba $(-3)$ jest rozwiązaniem równania kwadratowego<br>$x^2+(p+4)x+(p+1)^2=0$ :<br>$p=2$ lub $p=-1$ . |
|   | 7.5 | Rozwiązanie układu warunków z punktu 7.4: $p=2$ .                                                                                                                                             | 1 | Sprawdzenie, że tylko dla $p=2$ liczba $(-3)$ jest jedynym rozwiązaniem równania kwadratowego.                                                            |
|   | 7.6 | Zapisanie odpowiedzi: $p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ .                                                                                                                                | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 7.4 | <b>II sposób rozwiązania: (czynności 7.4, 7.5)</b><br>Zapisanie warunku, przy którym liczba $(-3)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $x^2+(p+4)x+(p+1)^2=0$ : $(x+3)^2=x^2+(p+4)x+(p+1)^2$ . | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 7.5 | Obliczenie $p$ : $p=2$ .                                                                                                                                                                      | 1 |                                                                                                                                                           |
| 8 | 8.1 | Zapisanie zależności między bokami czworokąta opisanego na okręgu: $a+b=2c$ , gdzie $a$ – długość dłuższej podstawy, $b$ – długość krótszej podstawy, $c$ – długość ramienia trapezu.         | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 8.2 | Wyznaczenie różnicy długości podstaw trapezu za pomocą długości ramienia: $a-b=4c-60$ .                                                                                                       | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 8.3 | Wyrażenie wysokości trapezu w zależności od długości ramienia:<br>$h=\sqrt{-3c^2+120c-900}$ .                                                                                                 | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 8.4 | Wyznaczenie pola trapezu jako funkcji długości jego ramienia:<br>$P=c \cdot \sqrt{-3c^2+120c-900}$ .                                                                                          | 1 |                                                                                                                                                           |
|   | 8.5 | Wyznaczenie dziedziny funkcji $P$ : $c \in (15, 30)$ .                                                                                                                                        | 2 | 1 pkt za oszacowanie $c < 30$ .<br>1 pkt za oszacowanie $c > 15$ .                                                                                        |

|   |     |                                                                                                                                                                                     |   |                                                                                                                                                     |
|---|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9 | 9.1 | Oznaczenie współrzędnych środka okręgu $S = (x, 0)$ i zapisanie równania pozwalającego wyznaczyć współrzędne środka okręgu, np.:<br>$\sqrt{(x-1)^2 + 4^2} = \sqrt{(x+6)^2 + 3^2}$ . | 1 |                                                                                                                                                     |
|   | 9.2 | Obliczenie współrzędnych punktu $S$ : $S = (-2, 0)$ .                                                                                                                               | 1 | Jeśli zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka $AB$ oraz jej punkt przecięcia z osią $Ox$ , to przyznajemy punkty w czynnościach 9.1 oraz 9.2. |
|   | 9.3 | Obliczenie długości promienia okręgu: $r = 5$ i zapisanie równania okręgu:<br>$(x+2)^2 + y^2 = 25$ .                                                                                | 1 |                                                                                                                                                     |
|   | 9.4 | Wyznaczenie równania prostej $AB$ : $y = \frac{1}{7}x + \frac{27}{7}$ .                                                                                                             | 1 | Wystarczy, że zdający obliczy współczynnik kierunkowy prostej $AB$ .                                                                                |
|   | 9.5 | Zapisanie równania rodziny prostych prostopadłych do prostej $AB$ :<br>$y = -7x + b$ .                                                                                              | 1 |                                                                                                                                                     |
|   | 9.6 | Wykorzystanie wzoru na odległość punktu $(0, 0)$ od prostej o równaniu<br>$y = -7x + b$ i zapisanie równania: $\sqrt{2} = \frac{ b }{5\sqrt{2}}$ .                                  | 1 |                                                                                                                                                     |
|   | 9.7 | Wyznaczenie równań prostych spełniających warunek zadania:<br>$y = -7x - 10$ , $y = -7x + 10$ .                                                                                     | 1 | Wystarczy, że zdający obliczy wartości $b$ , o ile zapisał równanie rodziny prostych<br>$y = -7x + b$ .                                             |

|    |      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |                                                                                                                         |
|----|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 | 10.1 | Zapisanie, że ciąg $(\sin \alpha, \sin \beta, 1)$ lub $(1, \sin \beta, \sin \alpha)$ jest geometryczny.                                                                                                                                | 1 | Nie wymagamy rozpatrzenia obu przypadków, ale istotne jest założenie, że „1” jest pierwszym lub ostatnim wyrazem ciągu. |
|    | 10.2 | Wykorzystanie definicji lub własności ciągu geometrycznego i zapisanie warunku: $\sin^2 \beta = \sin \alpha \cdot 1$ .                                                                                                                 | 1 |                                                                                                                         |
|    | 10.3 | Wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi w trójkącie prostokątnym: $\sin \beta = \cos \alpha$ oraz jedynki trygonometrycznej i zapisanie równania z niewiadomą $\sin \alpha$ : $1 - \sin^2 \alpha = \sin \alpha$ . | 1 |                                                                                                                         |
|    | 10.4 | Rozwiązanie równania: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ .<br>Podanie odpowiedzi: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .                                                                     | 1 |                                                                                                                         |

|    |      |                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | 11.1 |  <p>Zaznaczenie na rysunku szukanego kąta.</p>                                                                                                                                   | 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | 11.2 | Obliczenie długości przekątnej podstawy i wysokości ściany bocznej:<br>$a\sqrt{2}$ i $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , gdzie $a$ oznacza długość krawędzi ostrosłupa.                                                                                                        | 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | 11.3 | Zastosowanie twierdzenia kosinusów w trójkącie, w którym występuje kąt dwuścienny $\alpha$ : $(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha$ . | 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | 11.4 | Obliczenie kosinusa kąta $\alpha$ : $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ .                                                                                                                                                                                                 | 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | 11.3 | <b>II metoda rozwiązania: (czynności 11.3 i 11.4)</b><br>Zastosowanie definicji funkcji sinus dla połowy kąta $\alpha$ :<br>$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$                                         | 1 | Jeśli zdający obliczy przybliżoną wartość kąta $\frac{1}{2}\alpha$ , a następnie wartość kąta $\alpha$ i poprawnie ustali na tej podstawie przybliżoną wartość $\cos \alpha$ , to otrzymuje punkty w czynnościach 11.3 i 11.4. Za samo obliczenie przybliżonej wartości kąta $\alpha$ nie przyznajemy punktów w czynności 11.4. |
|    | 11.4 | Wyznaczenie kosinusa kąta $\alpha$ : $\cos \alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = -\frac{1}{3}$ .                                                                                                                                           | 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

**Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.**