

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

☐

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

LISTOPAD
ROK 2006

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj  pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

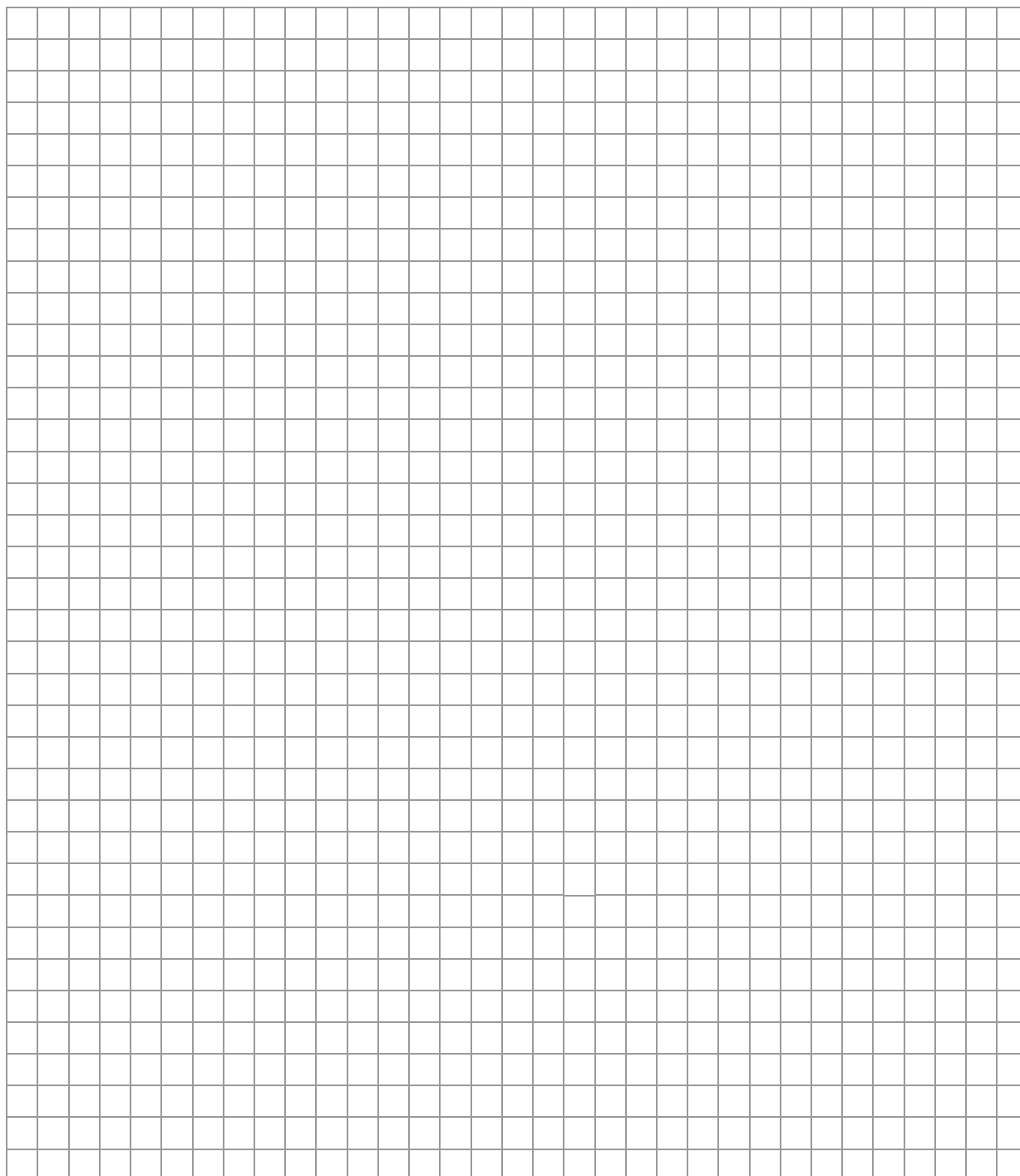
--	--	--

KOD
ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (5 pkt)

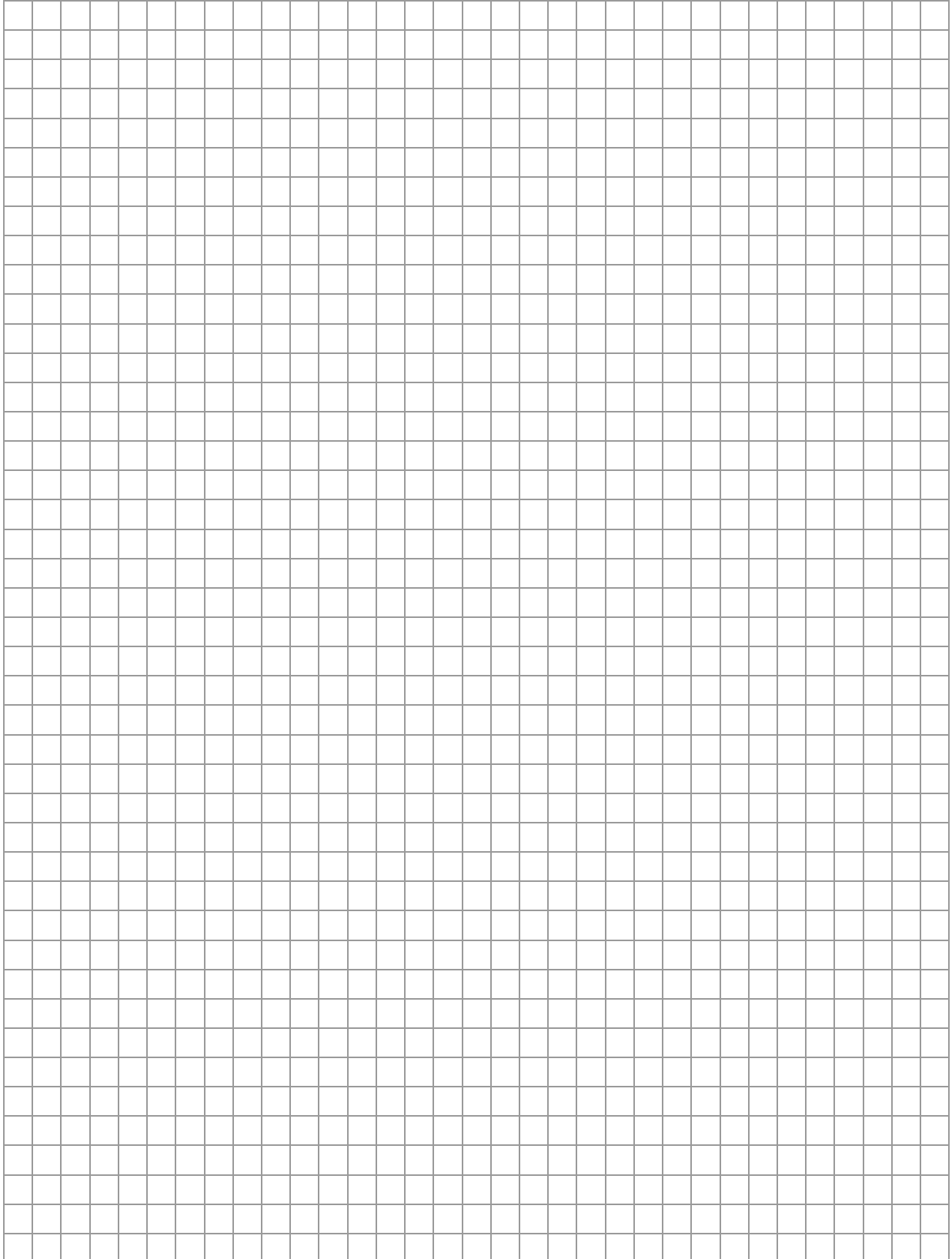
Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.

- a) Dla $p=1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.
- b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których w przedziale $(p, +\infty)$ funkcja f jest malejąca.



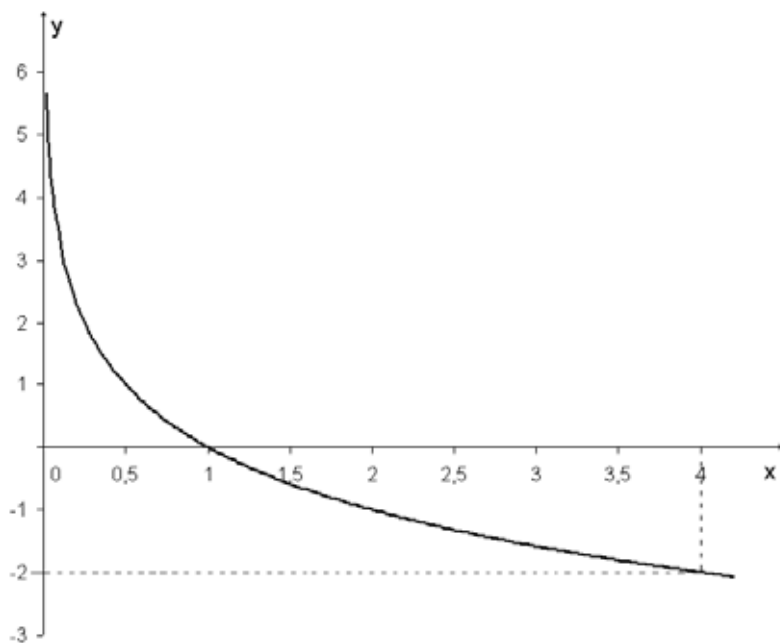
Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości $k \in R$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

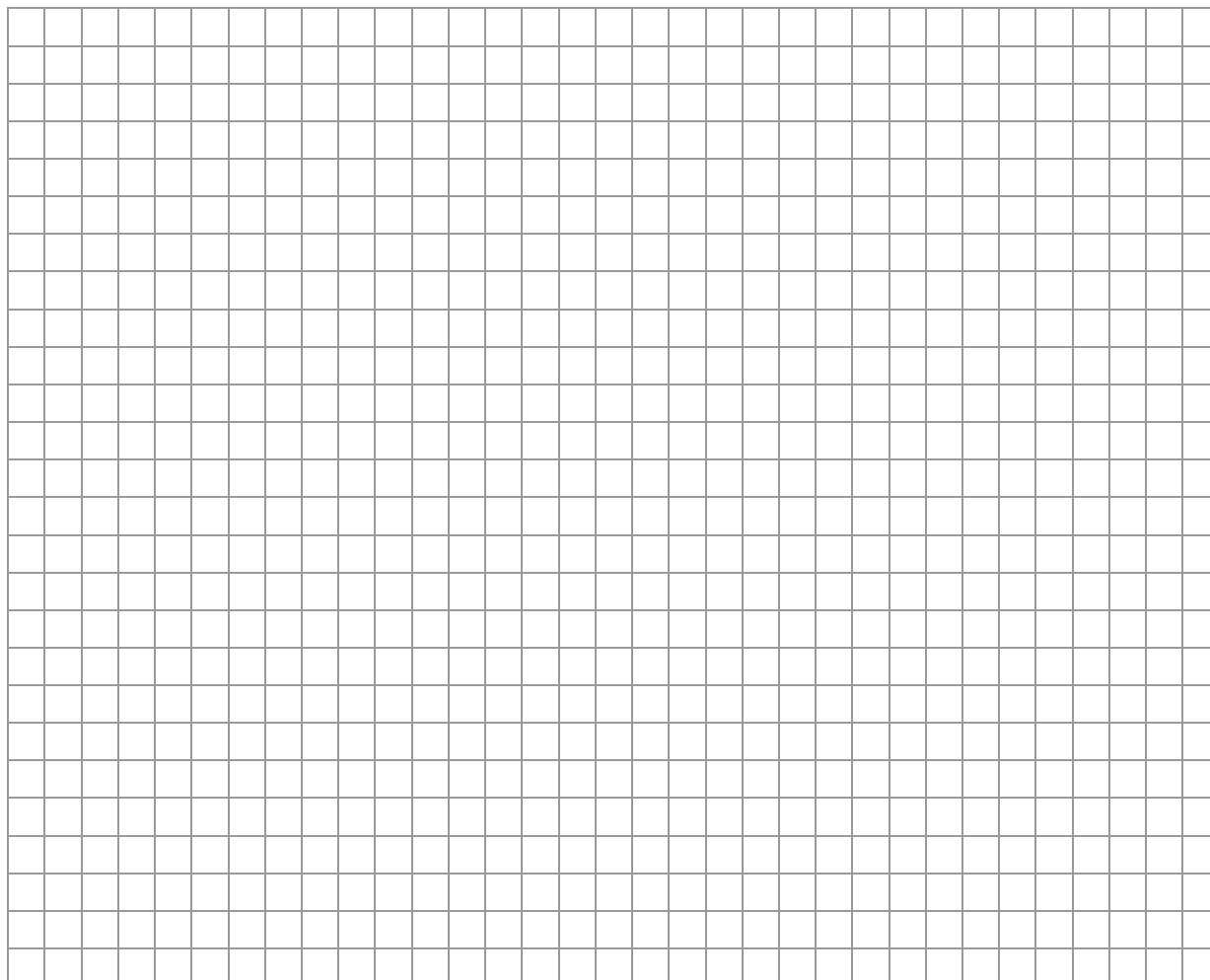
A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to show their work.

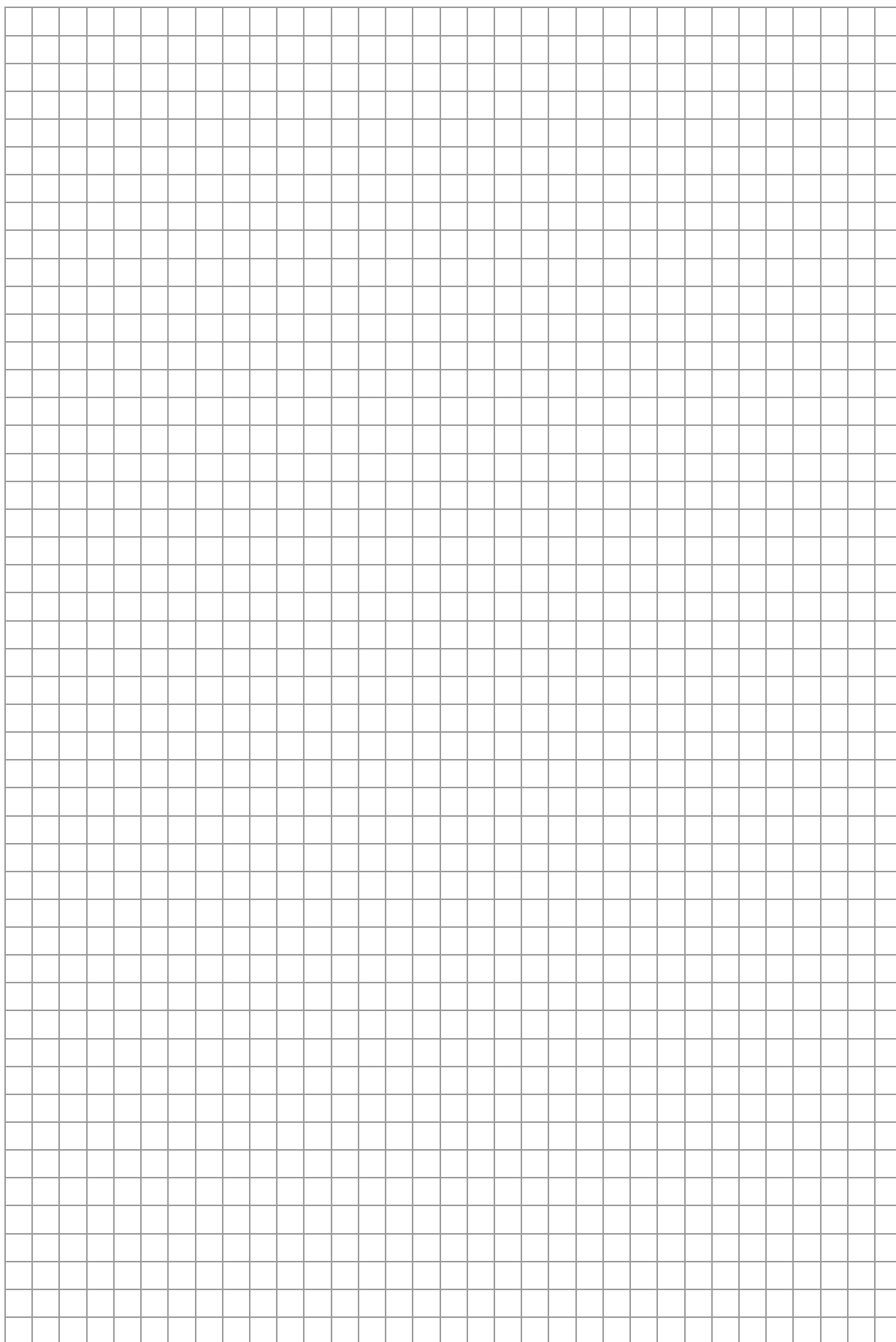
Zadanie 3. (4 pkt)

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f .



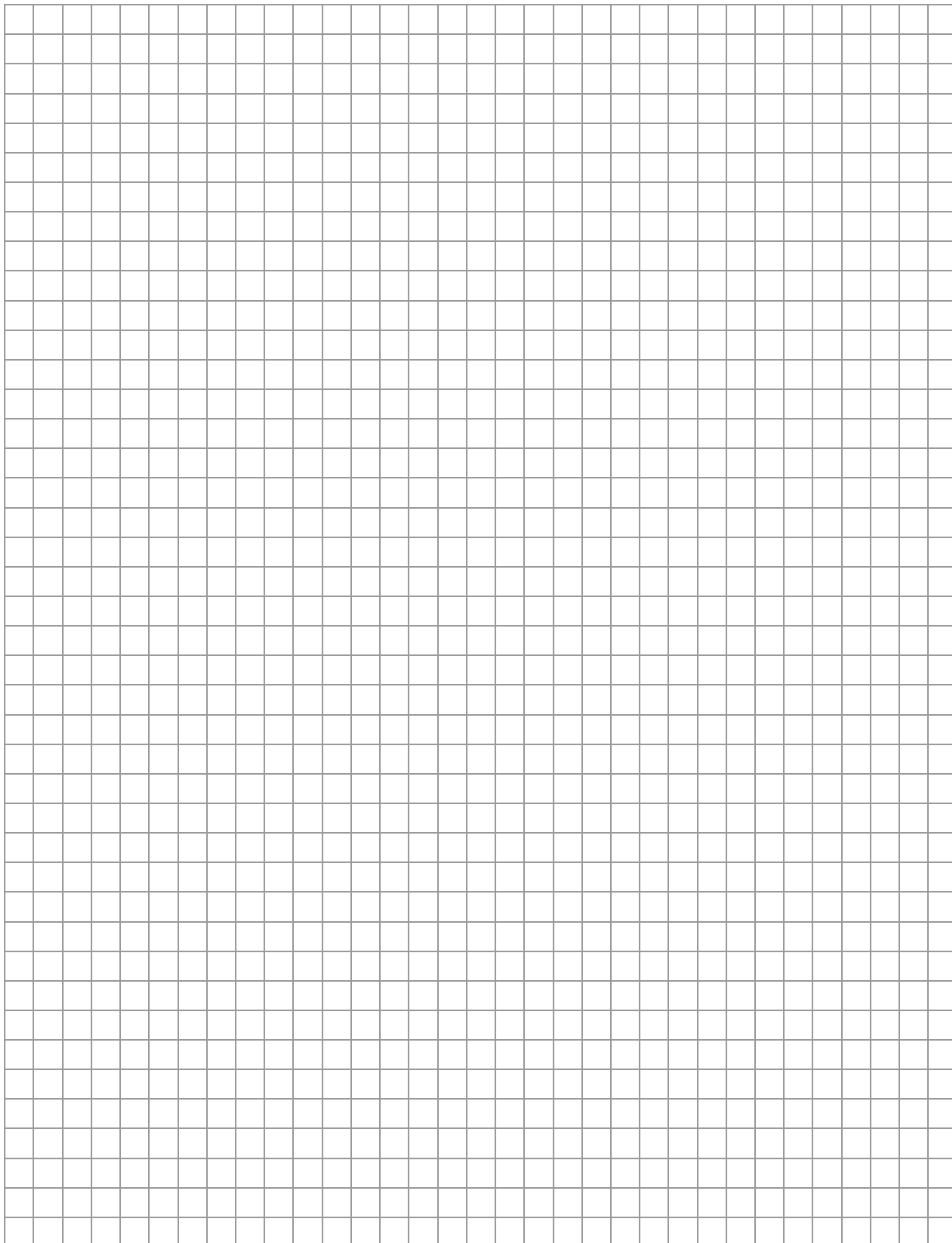
Rozwiąż równanie $(f(x))^2 - 16 = 0$.





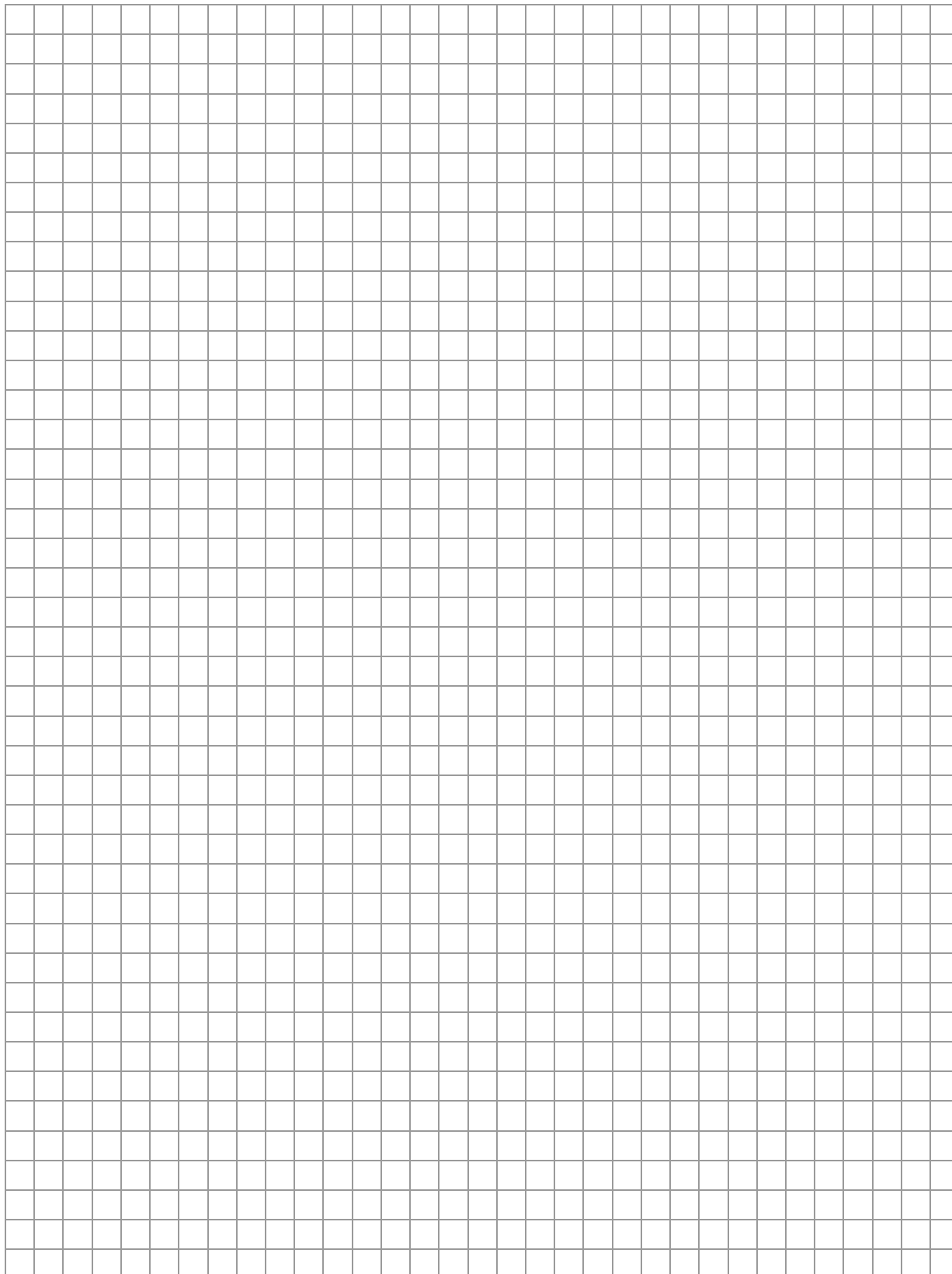
Zadanie 4. (7 pkt)

Trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.



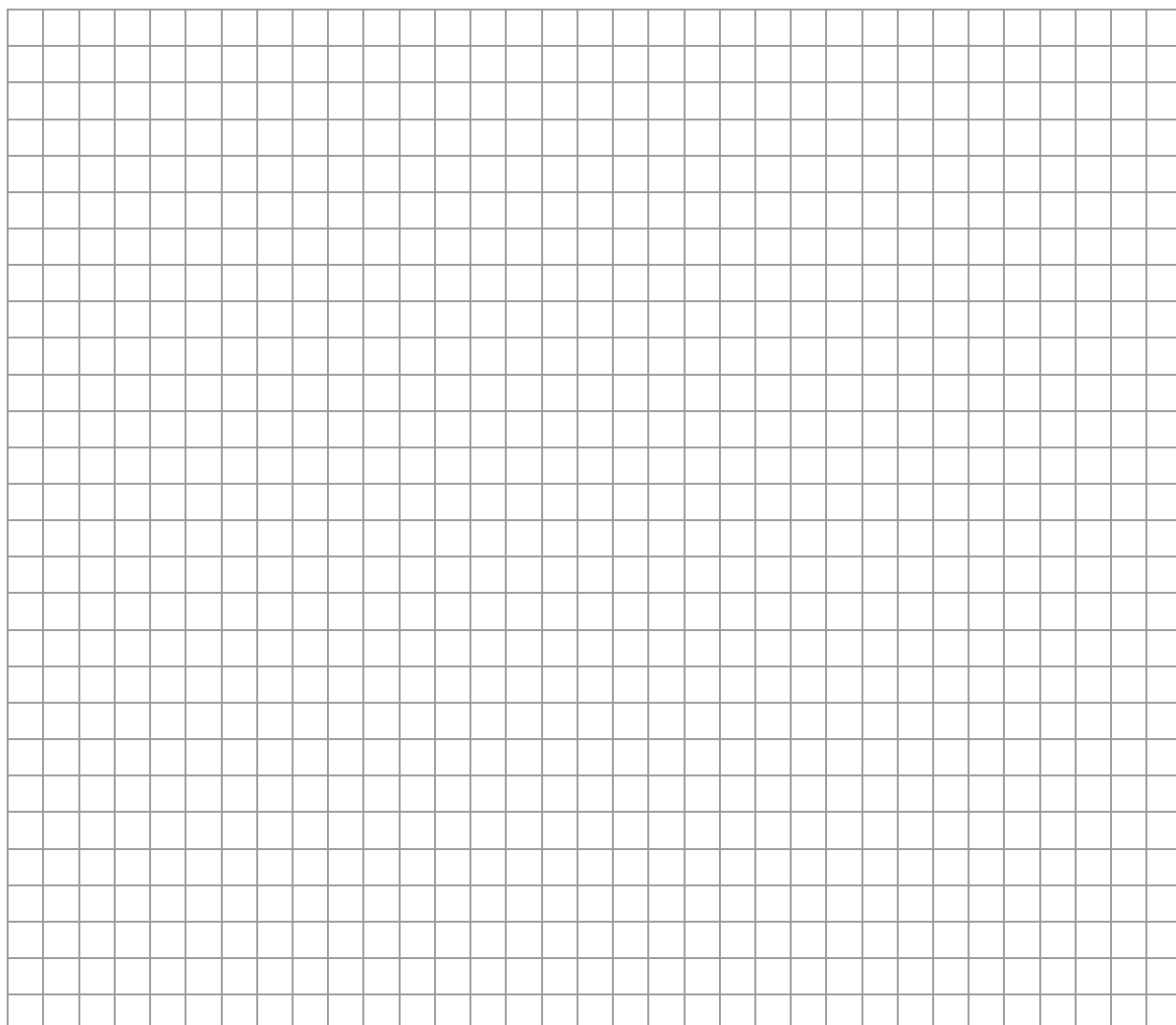
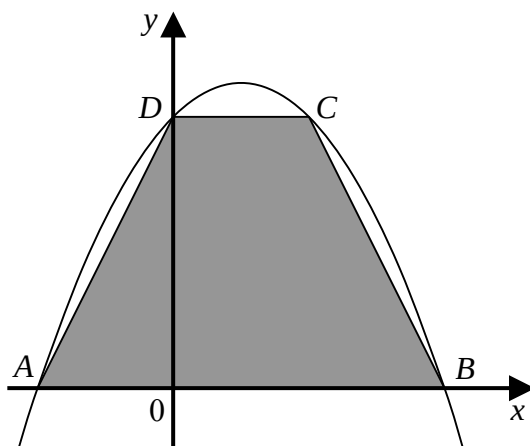
Zadanie 5. (3 pkt)

Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x , dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x , dla których przyjmuje minima lokalne.



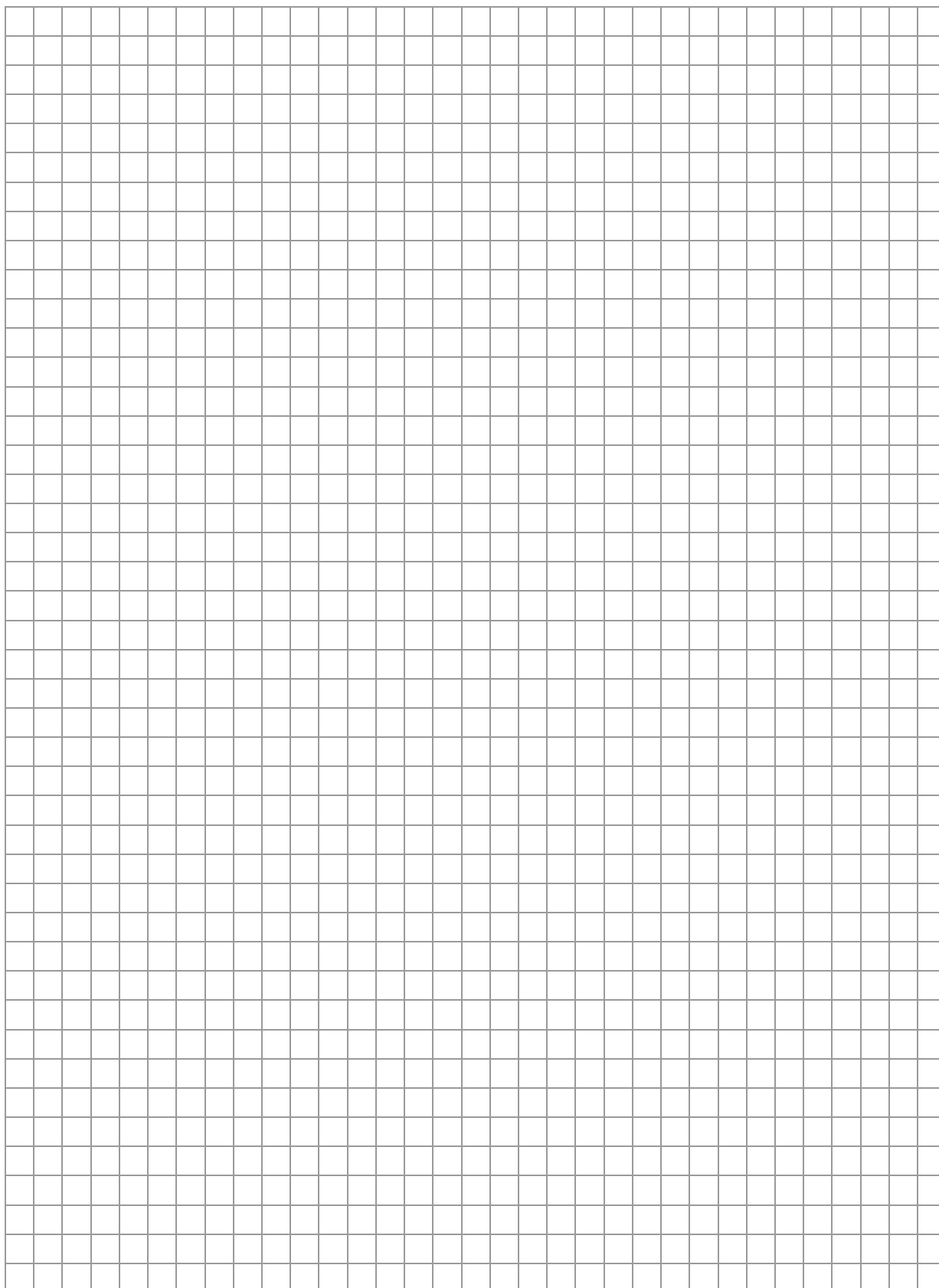
Zadanie 6. (4 pkt)

Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox , wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią Oy . Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 7. (3 pkt)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x = \cos x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.



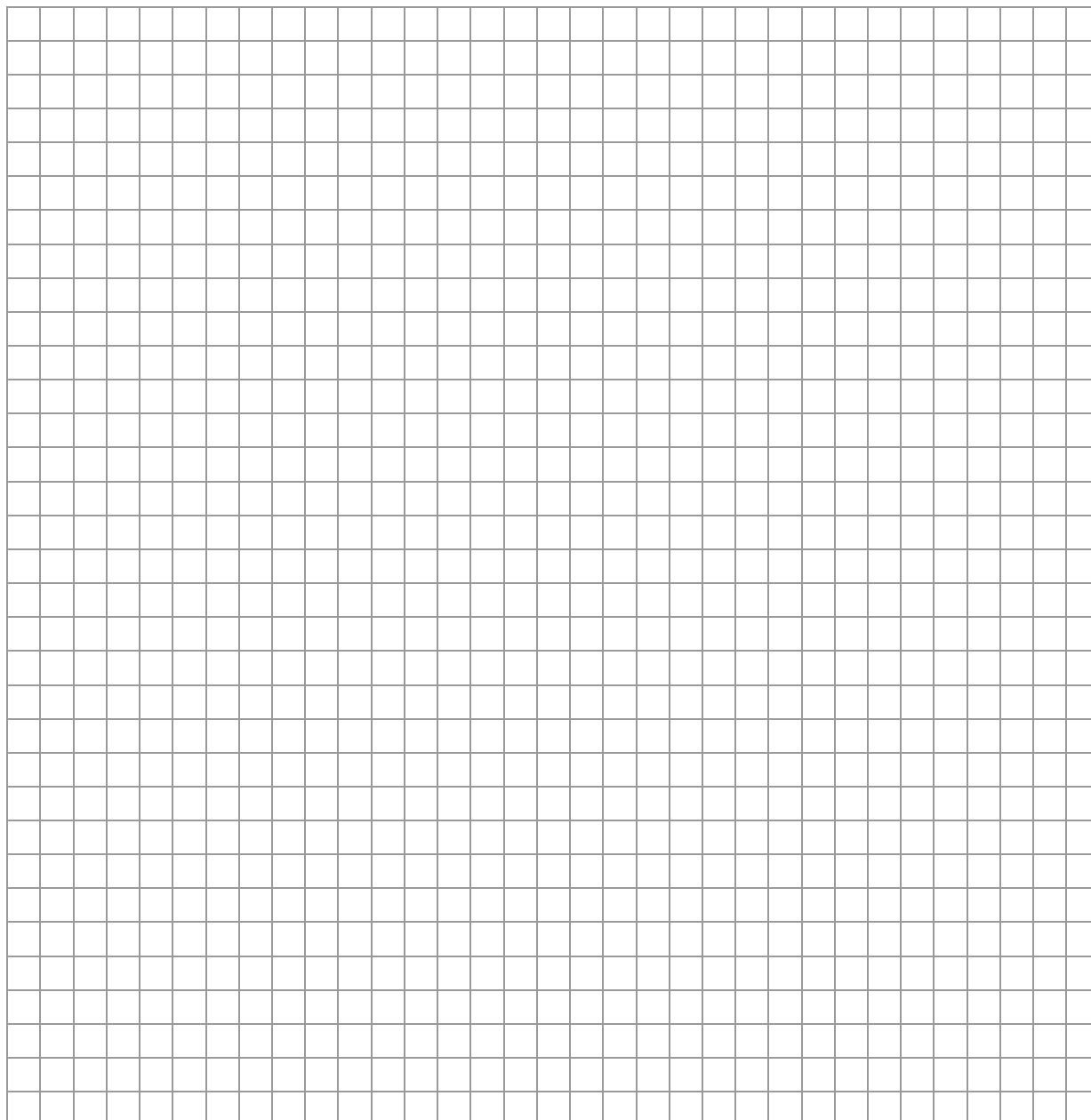
Zadanie 8. (4 pkt)

Uczeń analizował własności funkcji f , której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

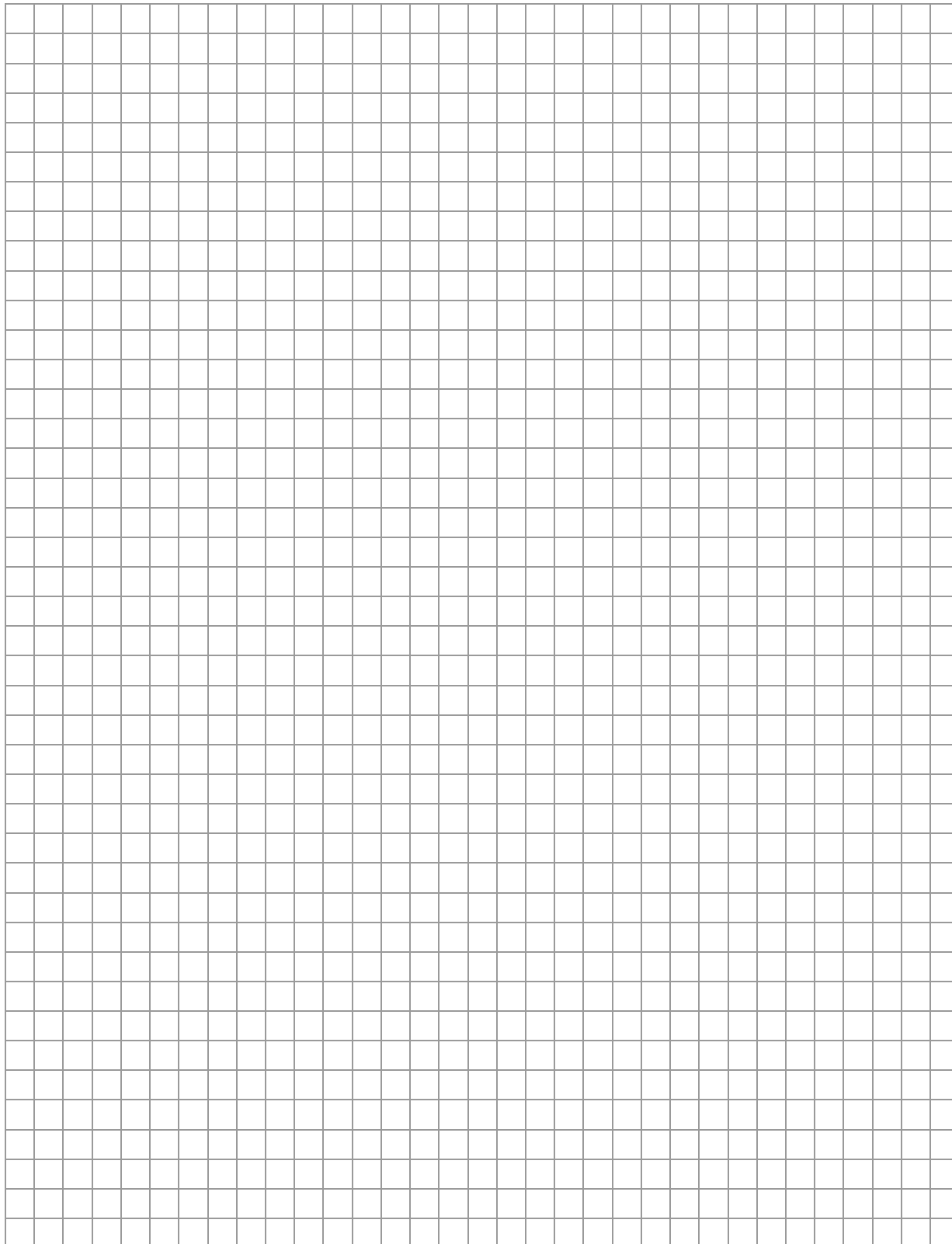
Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

- Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.
- Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji f . Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.



Zadanie 9. (3 pkt)

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \setminus B) = 0,3$, zbadaj, czy A i B są zdarzeniami niezależnymi.

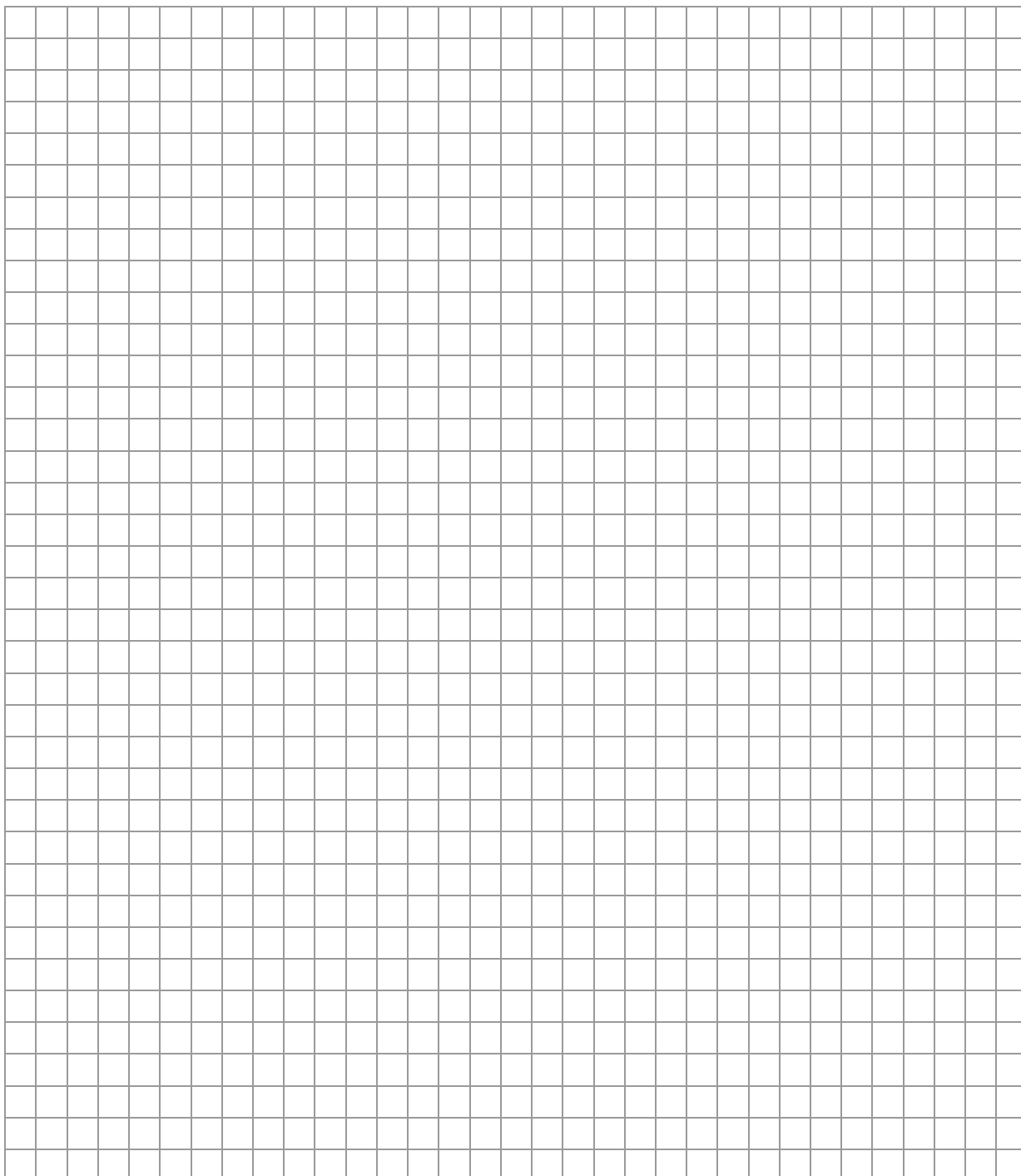


Zadanie 10. (5 pkt)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

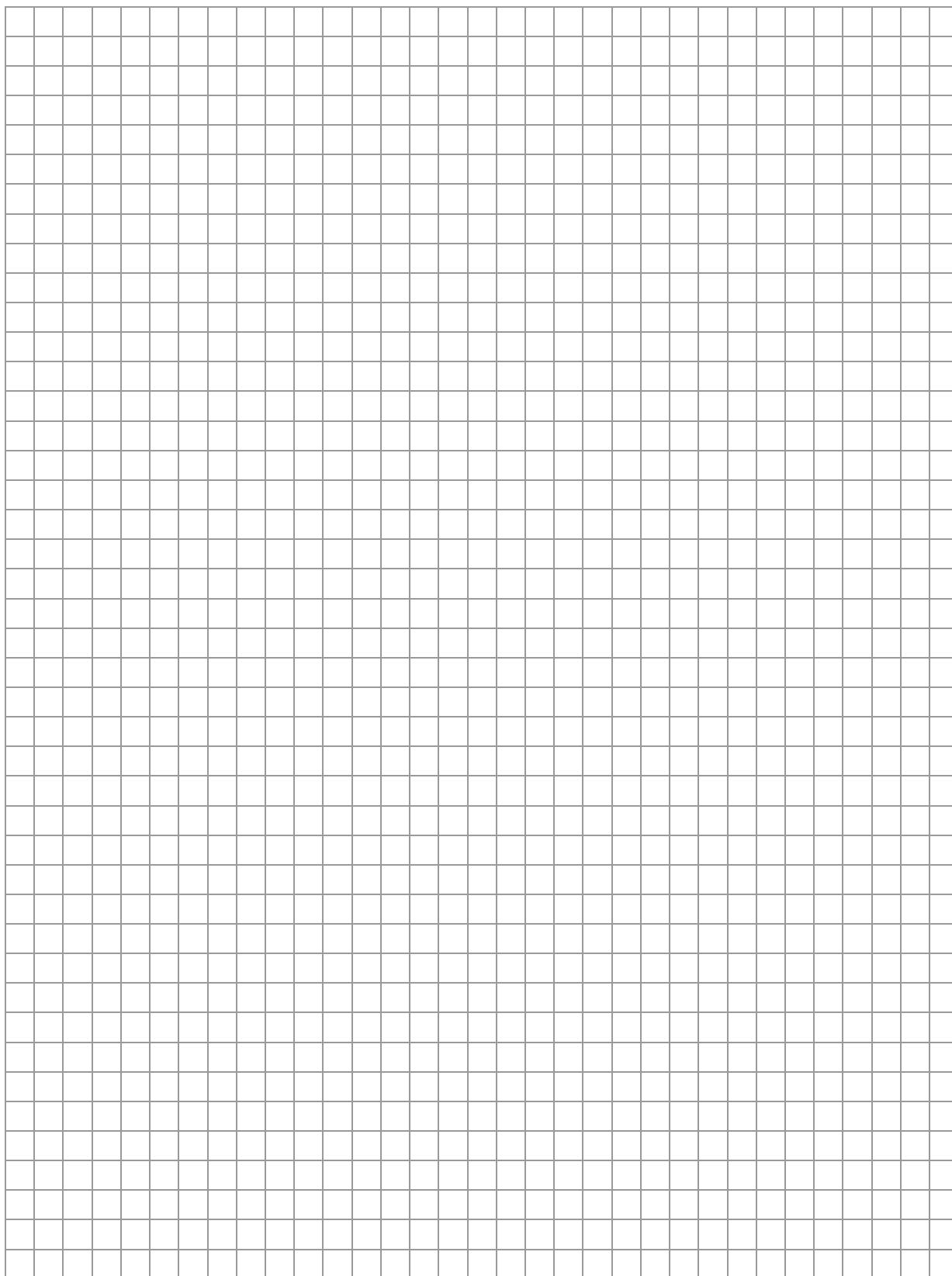
$$a_n = (n-3)(2-p^2), \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}.$$

- a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
- b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{40}$.
- c) Wyznacz wszystkie wartości p , dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.



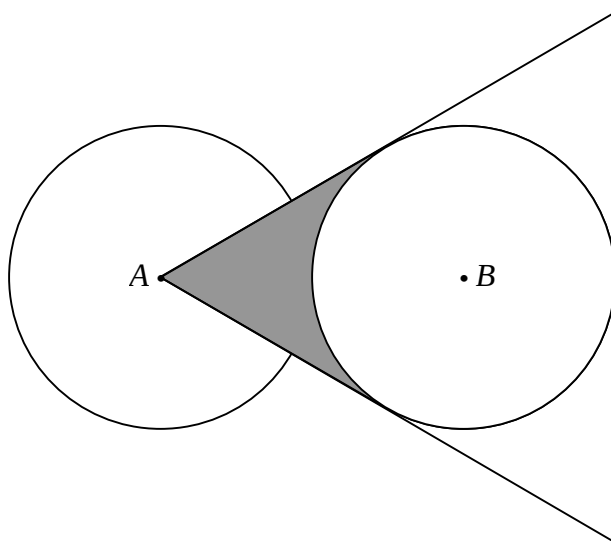
Zadanie 11. (3 pkt)

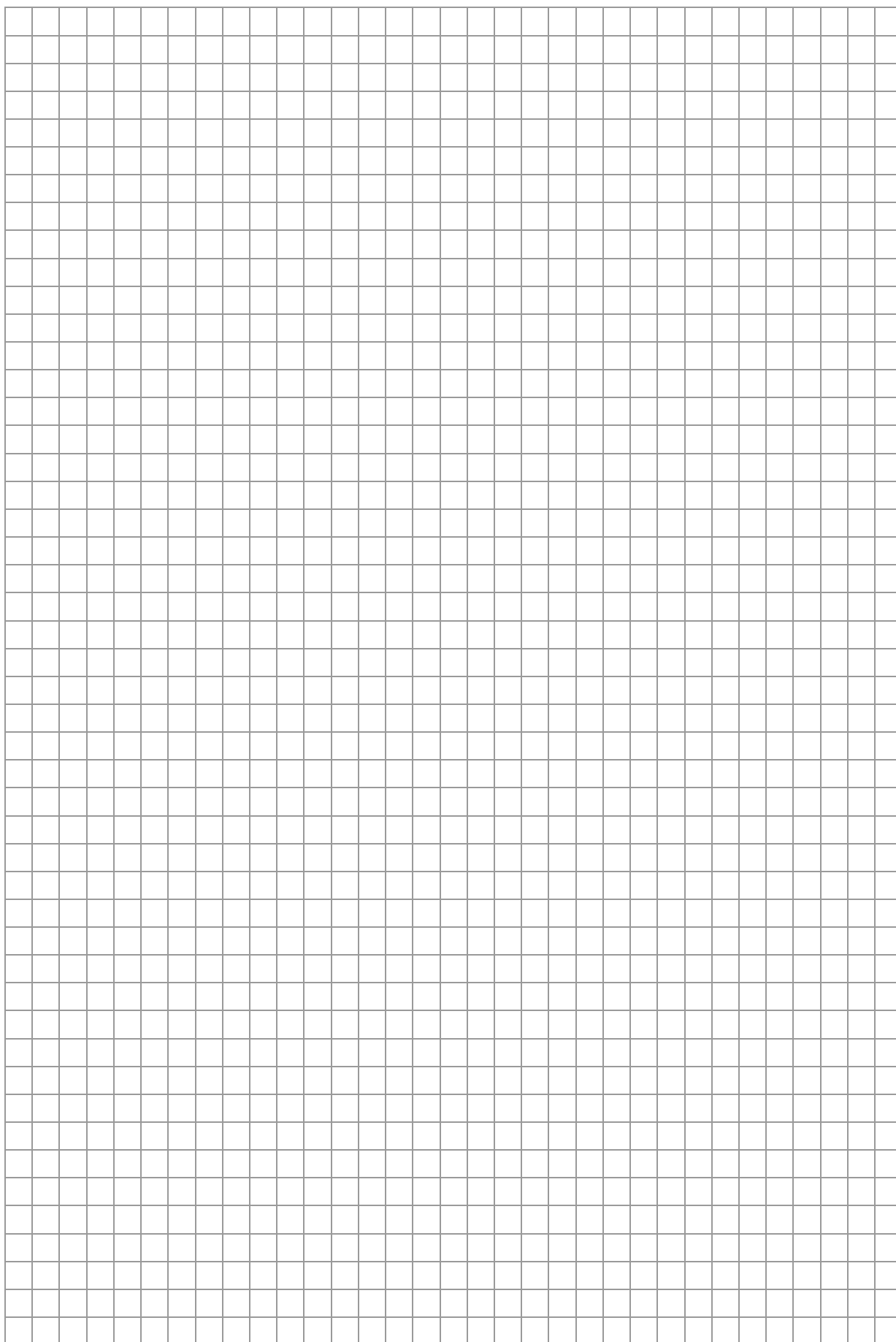
Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x . Wyznacz wzór funkcji f .



Zadanie 12. (4 pkt)

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).





BRUDNOPIS